Examen du 25 juin 2013: 8h00-10h00

On considère le phénomène de convection-diffusion de la densité d'un polluant dans un fluide. On ne considère ce phénomène que dans une direction d'espace suivant la coordonnée $x \in (0, \ell) = \Omega$ et son évolution dans le temps représenté par la variable $t > 0$. Etant donnés $f(t,x)$ la source de polluant, $a > 0$ la vitesse de convection et k le coefficient de diffusivité, l'équation régissant ce phénomène est

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + a\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = f(t,x). \tag{1}$$

Si le polluant est totalement absorbée du côté $x = 0$ et laissé intact (aucune source) du côté $x = \ell$ alors les conditions aux limites sont

$$u(t,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial u(t,\ell)}{\partial x} = 0 \text{ pour } t > 0. \tag{2}$$

Dans l'état initial le fluide est supposé pollué suivant une densité $g(x)$,

$$u(0,x) = g(x) \text{ pour } x \in \Omega. \tag{3}$$

Exercice 1. Calculer la solution de ce problème en l'absence de source et de courant de convection ($f = a = 0$) avec la méthode de séparation de variables.

Exercice 2. On considère le cas de la convection sans diffusion ($k = 0$) dans un milieu infini ($\mathbb{R}$ remplace $(0,\ell)$ et on ne considère pas les conditions aux limites (2)),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \\ u(x,0) &= g(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

1. Vérifier que $u(x,t) = g(x - at)$ est une solution pour $t \geq 0$ de cette équation. Elle représente une onde progressive de vitesse a.

2. Les courbes $(x(t), t)$ dans le plan (x,t) où $x(t)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt}(t) = a \text{ pour } t > 0 \text{ et } x(0) = x^0,$$

sont appelées les courbes caractéristiques de l'équation (4). Comme a est indépendant de t, il s'agit des droites $x(t) = x^0 + at$ pour $t > 0$. Sans utiliser la solution explicite, montrer que les solutions de l'équation (4) restent constantes le long de ces droites.

Exercice 3. On considère le problème de convection-diffusion à l'état stationnaire et pour une source f non nulle,

$$-ku''(x) + au'(x) = f(x) \text{ pour } x \in (0,\ell), \tag{5}$$

avec les mêmes conditions aux limites

$$u(0) = 0, \; u'(\ell) = 0. \tag{6}$$

On formule un schéma de discrétisation par différences finies sur une subdivision constituée de $N+2$ points $x_i = ih$ pour $i = 0, ..., N+1$ et $h = \frac{1}{N+1}$.

1. Présenter la démarche de construction d'un schéma de différences finies aux points intérieurs $(x_i)_{i=1,...,N}$ en utilisant, pour le terme de convection u', le schéma de différences finies centré. On notera u_i l'approximation de $u(x_i)$ utilisée dans le schéma.
2. Au point $x_0 = 0$, on impose naturellement $u_0 = 0$ et au bord $x_{N+1} = \ell$ on propose d'utiliser le schéma

$$u'(x) \approx \frac{\frac{1}{2}u(x-2h) - 2u(x-h) + \frac{3}{2}u(x)}{h}.$$

Montrer que cette approximation est consistante et que son erreur est d'ordre 2.
3. Utiliser cette approximation pour en déduire un schéma pour la condition au bord $x = \ell$.
4. Ecrire le schéma complet sous forme matricielle.

Exercice 4. On formule la méthode des éléments finis pour le problème de l'exercice 3.
1. Montrer qu'en utilisant l'espace de fonctions admissibles $V = \{v \in H^1(0,\ell) \mid v(0) = 0\}$, la formulation variationnelle associée au problème (5-6) s'écrit: $u \in V$ est solution de

$$\int_0^\ell ku'(x)v'(x) + au'(x)v(x)\; dx = \int_0^\ell f(x)v(x)\; dx \text{ pour tout } v \in V.$$

5. Décrire précisément les fonctions de base qui doivent être utilisées. En particulier, on détaillera celles qui sont utilisées au bord ainsi que l'expression générale de celles utilisées à l'intérieur du maillage.
6. En utilisant les formules

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} \varphi_i(x)\varphi_i(x) & \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x) \\ \varphi_{i+1}(x)\varphi_i(x) & \varphi_{i+1}(x)\varphi_{i+1}(x) \end{pmatrix} dx &= \frac{h}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \\
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} \varphi_i'(x)\varphi_i(x) & \varphi_i'(x)\varphi_{i+1}(x) \\ \varphi_{i+1}'(x)\varphi_i(x) & \varphi_{i+1}'(x)\varphi_{i+1}(x) \end{pmatrix} dx &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} \varphi_i'(x)\varphi_i'(x) & \varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x) \\ \varphi_{i+1}'(x)\varphi_i'(x) & \varphi_{i+1}'(x)\varphi_{i+1}'(x) \end{pmatrix} dx &= \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

établir la première équation du système d'équations résultant de l'application de la méthode des éléments finis.