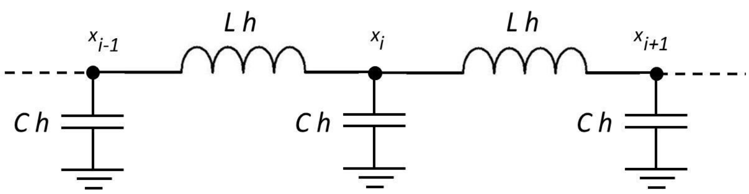
MT 28 - Printemps 2014

Examen du 26 juin 2014: 8h00-10h00

1. On considère une ligne électrique constituée d'une répétition de cellules (x_i, x_{i+1}) de longueur h comprenant chacune une inductance $L\ h$ et une capacité $C\ h$ comme sur le schéma où L et C sont deux constantes positives. Les inductances sont reliées entre elles en série et chaque capacité est placée entre un noeud x_i du circuit et la masse. Dans une section (x_i, x_{i+1}) la tension d'entrée est $V_h(x_i,t)$ et la tension de sortie est $V_h(x_{i+1},t)$ où t représente la variable de temps. Les courants entrants et sortants au noeud x_i sont $I_h(x_i,t)$ et $I_h(x_{i+1},t)$. La chute de tension $\Delta V(x_i,t) = V_h(x_i,t) - V_h(x_{i+1},t)$ dans l'inductance est proportionnelle à la dérivée temporelle du courant, $\Delta V(x_i,t) = Lh\dfrac{\partial I_h(x_i,t)}{\partial t}$ et le courant I_C circulant à travers la capacité relié en x_i est proportionnel à la dérivée temporelle de la tension $I_C(x_i,t) = Ch\dfrac{\partial V_h(x_i,t)}{\partial t}$. Enfin, la loi de Kirchhoff des courants au noeud x_i (la somme des courants est nulle) s'écrit $I_h(x_i,t) - I_C(x_i,t) - I_h(x_{i+1},t) = 0$.



1.a. Etablir les deux équations aux dérivées partielles vérifiées par les limites $V(x,t)$ et $I(x,t)$ de $V_h(x,t)$ et $I_h(x,t)$ obtenues lorsque la taille h des cellules tend vers zéro,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}.$$

1.b. En déduire l'équation, dite des télégraphistes (*équation de la propagation dans des cables introduite lors de la création du télégraphe*), vérifiée par la tension $V(x,t)$,

$$LC\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Dans la suite, on pose $LC = 1$, on considère que l'équation des télégraphistes est posée dans les intervalles $x \in (0,1)$ et $t \in (0,1)$ avec conditions aux limites sur la tension

$$V(0,t) = V(1,t) = 0. \tag{2}$$

On adjoint également les conditions initiales

$$V(x,0) = V_0(x) \text{ et } \frac{\partial V(x,0)}{\partial t} = V_1(x) \tag{3}$$

où V_0 et V_1 sont deux fonctions données définies sur $(0,1)$.

2. Quel est le type de l'équation des télégraphistes (bien justifier votre réponse)?

3. On utilise la méthode des variables séparées en posant $V(x,t) = u(x)w(t)$ pour déterminer la solution générale de l'équation des télégraphistes munie des conditions aux limites (<u>on ne tient pas compte des conditions initiales</u>).

3.a. Montrer que u et w sont solutions des équations

$$\frac{d^2w}{dt^2}(t) = -k^2 w(t) \text{ pour } t \in (0,1) \text{ et } \frac{d^2u}{dx^2}(x) = -k^2 u(x) \text{ pour } x \in (0,1)$$

pour n'importe quel nombre k.

3.b. Calculer toutes les solutions possibles u en tenant compte des conditions aux limites.

3.c. En déduire la solution générale w et finalement toutes les solutions V de (1-2).

On considère la formulation variationnelle

$$V(t,.) \in \mathcal{V}, \int_0^1 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} w(x) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\frac{\partial w(x)}{\partial x}\, dx = 0 \text{ pour chaque } t \in (0,1)$$
$$\text{pour tout } w \in \mathcal{V} = \{v \in H^1(0,1) \mid v(0) = v(1) = 0\}.$$

4. Montrer que le problème aux limites (1-2) implique la formulation variationnelle.

Dans la suite, on procède à une discrétisation par la méthode des différences finies. Pour cela, on choisit de l'effectuer sur le système des équations satisfaites par le couple (I,V),

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ pour } x \in (0,1) \text{ et } t \in (0,1).$$

5. Montrer que ce système s'écrit sous la forme d'un système

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + A\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ où } U = \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. On propose d'appliquer le schéma de Lax-Friedrichs avec les pas de temps et pas d'espace Δt et Δx et avec la notation U_j^n pour l'approximation de $U(n\Delta x, j\Delta t)$:

$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{\Delta t} + A\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

6.a. Montrer que $\dfrac{U(x_j,t_{n+1}) - \frac{1}{2}(U(x_{j+1},t_n) + U(x_{j-1},t_n))}{\Delta t}$ est une approximation consistante de $\dfrac{\partial U(x_j,t_n)}{\partial t}$ et calculer l'ordre de consistance.

6.b. En déduire que le schéma est consistant à condition que le rappport $\dfrac{\Delta x^2}{\Delta t}$ tende vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0.