Examen du 24 juin 2016: 8h00-10h00

1. On considère quatre équations différentielles

$$\begin{array}{rclcl}(a)\ \dfrac{d^4u}{dx^4} - \sin(x)\dfrac{d^2u}{dx^2} & = & \cos(x) & & (b)\ -\dfrac{d^2y}{dt^2} + y\dfrac{dy}{dt} = 1 \\ (c)\ -\dfrac{d^2u}{dz^2} + u^3 & = & 1 & \text{et} & (d)\ -\dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{dy}{dt} + \ln(1+|y|) = t.\end{array}$$

a. Dire parmi ces quatre équations lesquelles sont linéaires ou non linéaires en justifiant précisément votre réponse.

b. Donner l'ordre de chacune des équations et attribuez leur des conditions initiales pour en faire des problèmes de Cauchy bien posés (en terme de conditions initiales seulement).

2. On considère le problème de Cauchy

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^3(t) \text{ pour } t > 0 \text{ avec } y(0) = 1. \tag{1}$$

a. Calculer sa solution au voisinage de $t = 0$ ou bien ses solutions au cas où il en existerait plusieurs.

b. Enoncer le théorème de Cauchy-Lipshitz dans la version (globale) vue en cours appliqué à cette équation. On prendra un soin "extrême" à écrire ses conditions.

c. On considère le schéma

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n))$$

appelé le *schéma du point milieu* pour la résolution de l'équation différentielle $\dfrac{dy(t)}{dt} = f(t,y)$. Montrer qu'il s'agit d'un schéma à un pas et l'appliquer à l'équation différentielle (1).

d. Utiliser la condition de consistance à l'ordre 1

$$f(t,y) = \Phi(t,y,0). \tag{2}$$

et la condition de consistance d'ordre 2

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}f(t,y) = 2\frac{\partial \Phi(t,y,0)}{\partial h} \text{ pour tous } t \text{ et } y, \tag{3}$$

pour vérifier que le schéma du point milieu est consistant à l'ordre 2.
e. Sans faire de calcul supplémentaire (qui seraient un peu longs), dites ce que vous pensez a priori de la convergence du schéma lorsqu'il est appliqué à l'équation différentielle (1)?

3*. On considère une poutre horizontale soumise à un champ continu $x \mapsto f(x)$ de forces verticales. On considère une forme simplifiée du modèle qui régit la composante verticale $x \mapsto u(x)$ du champ de déplacement mécanique dans la poutre. Il s'écrit sous forme d'un problème aux limites du quatrième ordre,

$$\frac{d^4u}{dx^4}(x) = f(x) \text{ pour } x \in]0,1[, \tag{4}$$

$$u(0) = 0,\ \frac{d^2u}{dx^2}(0) = 0,\ u(1) = 0,\ \frac{d^2u}{dx^2}(1) = 0. \tag{5}$$

a. Démontrer que ce problème aux limites équivaut à la formulation variationnelle constituée

(i) de l'espace des fonctions admissibles

$$V = \{v \in H^2(]0,1[) \mid v(0) = 0,\ v(1) = 0\}$$

où l'espace de Sobolev $H^2(]0,1[)$ est défini par

$$H^2(]0,1[) = \{v \in L^2(]0,1[) \mid \frac{dv}{dx} \in L^2(]0,1[) \text{ et } \frac{d^2v}{dx^2} \in L^2(]0,1[)\},$$

(ii) de la condition d'admissibilité

$$u \in V,$$

(iii) et de l'équation sous forme intégrale

$$\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}(x)\frac{d^2v}{dx^2}(x)\ dx = \int_0^1 f(x)v(x)\ dx \text{ pour tout } v \in V. \tag{6}$$

b. Montrer que pour $f = 1$, la fonction $u(x) = (x^4 - x^3)/24$ est solution de l'équation sous forme intégrale (6) pour toute fonction test v assez régulière telle que $v(0) = 0$, $v(1) = 1$ et $v'(1) = 3$. Pour cela, on utilisera des intégrations par parties.

c. Peut-on en déduire que $u(x) = (x^4 - x^3)/24$ est solution du problème aux limites (4-5)?

d. Démontrer que pour $f = 0$, la solution de la formulation variationnelle est identiquement nulle.

e. En déduire l'unicité de la solution. Pour cela considérer deux solutions différentes u_1 et u_2 et démontrer que leur différence $u_1 - u_2$ est nécessairement nulle.