MT 28 - Printemps 2017

Examen du 30 juin 2017: 8h00-10h00

Exercice 1 Etudier l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = \frac{|y|}{1+t^2}.$$

Exercice 2: Résoudre explicitement le problème de Cauchy,

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{e^{y^2(t)}(t+t^3)}{y(t)} \text{ pour } t > 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 3: On considère l'équation différentielle vectorielle

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) \text{ pour } t > 0$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice 2×2 diagonalisable et d'éléments propres $(\lambda_1, \mathbf{V}_1)$ et $(\lambda_2, \mathbf{V}_2)$.

a. Rappeler la définition de l'exponentielle de la matrice $\mathbf{A}$ et rappeler la solution de l'équation différentielle vectorielle ci-dessus à l'aide d'une exponentielle.
b. Démontrer que la solution générale de l'équation différentielle s'écrit

$$\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{V}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{V}_2$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes quelconques et en déduire l'expression de l'exponentielle de la matrice $t\mathbf{A}$.
c. En déduire la solution générale de l'équation différentielle vectorielle pour la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

d. Puis déduire la solution passant par la condition initiale $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ à $t = 0$.
e. Calculer la solution de l'équation avec second membre

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

en utilisant la formule de Duhamel et l'expression de l'exponentielle d'une matrice trouvée à la question **b.** (*Attention: il est inutile de répondre à cette question par une méthode différente*).

Exercice 4: On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y) \text{ pour } t > 0. \tag{1}$$

a. En utilisant l'approximation de la dérivée par la formule du point milieu

$$y'(t + \frac{h}{2}) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} + O(h),$$

construire le schéma suivant

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n))$$

appelé le *schéma du point milieu* pour la résolution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.

b. Utiliser la condition de consistance à l'ordre 1

$$f(t, y) = \Phi(t, y, 0) \tag{2}$$

pour vérifier que le schéma du point milieu est consistant à l'ordre 1.

c. Etudier la stabilité du schéma dans le cas où $y \mapsto f(t, y)$ est lipschitzienne uniformément par rapport à t et en déduire s'il est convergent?

d. Etudier la convergence dans le cas particulier où $f(t, y) = e^{-y} + \cos(t)$.

e. Déterminer la condition de stabilité absolue pour le problème modèle $y' = \lambda y$ en fonction de $z = h\lambda$.

Exercice 5: Le champ de température $T(t, x)$ dans un barreau de longueur $L = 1$ dont les deux extrémités sont isolées et dont la température initiale est égale à $T_0(x)$ est régi par le problème aux limites suivant,

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t, x) = 0 \text{ pour } x \in]0, 1[\text{ et } t > 0 \\
\frac{\partial T}{\partial x}(t, 0) = 0, \ \frac{\partial T}{\partial x}(t, 1) = 0 \text{ pour } t > 0, \\
\text{et } T(0, x) = T_0(x) \text{ pour } x \in]0, 1[.
\end{gathered}$$

a. Quelle est la nature de cette équation aux dérivées partielles?

b. Est-ce que les conditions initiales et aux limites sont en bon nombre?

c. Démontrer que ce problème est équivalent à la formulation variationnelle construite avec l'espace de fonctions admissibles $\mathcal{V}^N = H^1(]0, 1[)$: pour tout $t > 0$

$$\begin{gathered}
x \mapsto u(t, x) \in \mathcal{V}^N \\
\text{et } \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial t}(t, x) v(x) + k \frac{\partial T}{\partial x}(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(x) \, dx = 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}^N,
\end{gathered}$$

munie la condition initiale

$$T(0, x) = T_0(x) \text{ pour } x \in]0, 1[.$$