Examen du 29 juin 2018: 8h00-10h00

Exercice 1 Déterminez l'ordre de chacune des équations différentielles suivantes. Indiquez également si elles sont linéaires ou non linéaires. Enfin, dans chaque cas indiquer le nombre de conditions initiales nécessaires pour que les problèmes puissent être bien posés.

a. $t^2 \dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + 2y = \sin t$

b. $(1+y^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + y = e^t$

c. $\dfrac{d^4y}{dt^4} + \dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 1$

d. $\dfrac{dy}{dt} + ty^2 = 0$

e. $\dfrac{d^3y}{dt^3} + t\dfrac{dy}{dt} + (\cos 2t)y = t^3$

Exercice 2 **a.** Trouver une équation algébrique vérifiée par la solution générale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3}.$$

b. Trouvez l'équation algébrique pour la solution passant par le point $x = 0$ et $y = 1$.
c. Déterminez un intervalle de validité de la solution.
d. Etudier l'existence et l'unicité de la solution par application du théorème de Cauchy-Lipschitz global.
e. On considère le problème de Cauchy associé avec la condition initiale $y(0) = 1$. Appliquer le schéma d'Euler explicite et donner l'expression de la solution approchée y_1 au premier pas.

Exercice 3 Etant donnée T_ε la transformation à deux échelles définie sur l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $[0, T]$.
a. Si c'est possible, appliquer l'analyse asymptotique à deux échelles à la fonction oscillante $g_\varepsilon(t) = \sin(2\pi t/\varepsilon) + \varepsilon \cos(t)$.
b. Soit l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt}(t) = f_\varepsilon(t) \text{ pour } t \in]0, T]$$

où f_ε est une fonction oscillante dépendante de ε. Mener l'analyse asymptotique à deux échelles sur cette équation en introduisant les hypothèses nécessaires minimales.

Exercice 4 A l'instant $t = 0$, un réservoir contient Q_0 grammes de sel dissous dans 100 litres d'eau. On suppose que de l'eau contenant 14 grammes de sel par litre pénètre

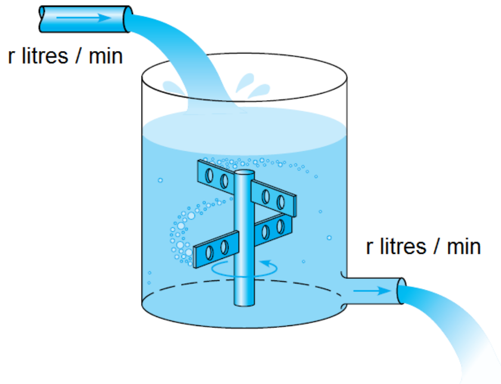

Figure 1: Le réservoir d'eau de l'exercice 3.

dans le réservoir à raison de r litres par minutes et que le mélange bien agité s'écoule du réservoir au même débit.
a. Etablir le problème de Cauchy dont est solution la quantité $Q(t)$ de sel dans le réservoir à chaque instant t.
b. Déterminer $Q(t)$.
c. Déterminer également la quantité limite Q_L présente après un temps très long.
d. Si $r = 3$ et $Q_0 = 2Q_L$, trouver le temps T après lequel le niveau de sel est dans les 2% de Q_L. Comme on ne dispose pas de calculette, on se contentera de fournir une expression symbolique.

Exercice 5
a. Rappeler la définition de l'exponentielle $e^{\mathbf{A}}$ d'une matrice $n \times n$ à coefficients réels $\mathbf{A}$ qui est diagonalisable.
b. Démontrer que $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$.
c. Démontrer que la solution générale du système d'équations différentielles $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$ est $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}_0$.
d. Enoncer la formule de Duhamel pour le calcul de la solution de l'équation différentielle $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t)$ où $t \to \mathbf{g}(t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6 a. Etant donnée l'équation des ondes

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \text{pour } x \in]0,1[\text{ et } t > 0 \\ u(0,t) = 0 \text{ et } u(1,t) = 0 & \text{pour } t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{pour } x \in]0,1[. \end{array}$$

que pouvez-vous dire sur les caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles.
b. Calculer la solution générale de l'équation et des conditions aux limites sans tenir compte des conditions initiales.
c. Calculer la solution en tenant compte des conditions initiales.
d. Proposer un schéma numérique d'approximation de l'équation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$.