MT 28 - Printemps 2019

Examen du 28 juin 2019: 8h00-10h00

Exercice 1 Pour les équations aux dérivées partielles ci-dessous donner leur ordre et nombre de variables spatiales et temporelles. Préciser s'il s'agit d'équations linéaires ou non linéaires. Lorsque c'est possible, donner leur classification et les conditions initiales et aux limites qu'il faut leur ajouter pour qu'elles puissent être bien posées.
1. L'équation de Lin-Tsien : $2u_{tx} + u_x u_{xx} - u_{yy} = 0$.
2. L'équation de Sine-Gordon : $v_{tt} - v_{xx} + \sin v = 0$.
3. L'équation de Tricomi : $u_{yy} = yu_{xx}$.

Exercice 2
1. Donner la définition détaillée de la transformation à deux échelles T_ε définie sur l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$.
2. Démontrer que pour une fonction u dérivable sur $[0, 1]$

$$(T_\varepsilon u')(t, \tau) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \tau}(T_\varepsilon u)(t, \tau).$$

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $y' = 1 + y^2$ et $y(0) = 0$.
2. $y' + xy^2 = -x$ et $y(0) = 0$.
3. $y' = \dfrac{x}{1+y}$ et $y(0) = 0$.

Exercice 3 Problèmes Hamiltoniens : **l'oscillateur harmonique.** Etant donné $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$x''(t) + x(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x(0) = x_0,\ x_0'(0) = p_0.$$

1. On introduit la fonction $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, p) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2)$.

(a) Montrer que la formulation de l'équation sous forme d'un système du premier ordre conduit au problème de Cauchy vectoriel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \partial_p H(x(t), p(t)) \\ -\partial_x H(x(t), p(t)) \end{pmatrix} \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(b) Démontrer que ce problème de Cauchy admet une solution unique.

(c) Calculer sa solution.

(d) Montrer que si (x, p) est solution de (1) alors

$$\frac{d}{dt}H(x(t), p(t)) = 0$$

et en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $H(x(t), p(t)) = H(x_0, p_0)$.

2. Soit $h > 0$ un pas de temps.

(**a**) Écrire explicitement le schéma d'Euler explicite pour le système (1) en fonction de h.

On notera $(t_n)_{n \in N} = (nh)_{n \in N}$ la suite des instants d'approximation, et $((x_n, p_n))_{n \in N}$ la suite des couples de valeurs approchées correspondantes.

(b) Donner explicitement $(H(x_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ après avoir démontré que $H(x_{n+1}, p_{n+1}) = (1 + h^2)H(x_n, p_n)$.

(c) En déduire la norme $||(x_n, p_n)||$ et sa limite quand $n \to \infty$?

3. On définit $H^* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $(x, p, h) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + p^2 + hxp)$. Soit $h > 0$ un pas de temps.

(a) Montrer que, pour tout $(x, p, h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$

$$(1 - \frac{1}{2}h)H(x, p) \leq H^*(x, p, h) \leq (1 + \frac{1}{2}h)H(x, p)$$

en utilisant l'inégalité $|xp| \leq \dfrac{x^2 + p^2}{2}$ que l'on démontrera.

(b) Justifier que le schéma implicite

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_n \\ -x_{n+1} \end{pmatrix} \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

peut être mis sous la forme d'un schéma à un pas. Ce schéma est appelé schéma d'Euler symplectique.

(c) Montrer que la suite ainsi construite vérifie

$$H^*(x_n, p_n, h) = H^*(x_0, p_0, h), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(d) Montrer que le schéma d'Euler symplectique est stable.

(e) Montrer qu'il est consistant d'ordre 1.

(f) Montrer qu'il est convergent d'ordre 1.

Exercice 4 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$, $g \in \mathbb{R}$ et u solution du problème aux limites

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f \text{ dans } \Omega =]0, 1[$$
$$u(0) = 0 \text{ et } \frac{du}{dx}(1) + u(1) = g.$$

1. Déterminer la formulation variationnelle associée de ce problème aux limites sachant que l'ensemble des fonctions admissibles est $V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v(0) = 0\}$.

2. Démontrer que toute solution de la formulation variationnelle est également solution du problème aux limites.