**MT 28 - Printemps 2021**

## Examen du 25 juin 2021: 8h00-10h00

### Exercice 1

**a.** Donner la définition de $e^{\mathbf{A}}$ et démontrer que $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$ pour une matrice $\mathbf{A}$ carrée et diagonalisable.

**b.** Considérons $\mathbf{A}$ une matrice $2 \times 2$ ayant 1 et 2 pour valeurs propres et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres associés. Calculez $e^{\mathbf{A}t}$.

**c.** A l'aide de la formule de Duhamel en déduire la solution du problème de Cauchy $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}$ pour $t > 0$ et $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un résultat obtenu avec autre méthode n'est pas compté.

### Exercice 2

**a.** Utilisez deux itérations du schéma d'Euler explicite avec un pas de temps $h = 0,2$ pour trouver une valeur approchée de $y(1,4)$ où $y$ est solution du problème de Cauchy

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) - t \text{ pour } t > 1 \text{ et } y(1) = 3.$$

**b.** Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz global pour démontrer que ce problème admet une solution unique.

**c.** Vérifier que la solution générale de l'équation différentielle est $y(t) = ce^t + t + 1$, où $c$ est une constante. En déduire la solution du problème de Cauchy. Puis, calculer l'**erreur de consistance** du schéma d'Euler explicite pour cette EDO à l'issue du second pas pour $h = 0,2$.

**d.** Démontrer la consistance du schéma d'Euler explicite pour cette EDO.

**e.** Démontrer la stabilité du schéma d'Euler explicite pour cette EDO. En déduire sa convergence.

### Exercice 3

**a.** Résoudre l'équation différentielle $v'(t) = \frac{v^2(t) + v(t)}{t(v(t) - 1)}$. On arrivera à une équation algébrique qu'on simplifiera mais qu'on ne peut pas résoudre. **Aide**: *Penser à utiliser la décomposition* $\frac{v-1}{v^2+v} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1}$ *où $A$ et $B$ sont à déterminer.*

**b.** En déduire la résolution de l'équation différentielle $y' = \frac{2y^2}{xy - x^2}$. De même, on arrivera à une équation algébrique qu'on s'implifera et qu'on ne peut pas résoudre. **Conseil:** *on pourra utiliser le changement de fonction $v(x) = y(x)/x$.*

**Exercice 4** On cherche la solution du problème aux limites de valeurs propres,

$$-\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega = ]0,1[\times]0,1[ \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

On dit que $\lambda$ est une valeur propre de l'application linéaire,

$$-\Delta : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \to & \mathcal{V} \\ u & \mapsto & -\Delta u \end{array}$$

définie dans le sous-espace vectoriel de $\mathcal{V} = L^2(\Omega)$ des fonctions à valeurs réelles qui vérifient $\Delta u \in \mathcal{V}$ et la condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$. A chaque valeur propre $\lambda$ il correspond des vecteurs propres $u$ qui sont des fonctions $(x, y) \to u(x, y)$ solution de (1).

**a.** Etant donné la formulation variationnelle: $u \in \mathcal{V}^D = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$,

$$\int_\Omega \overrightarrow{\nabla u}.\overrightarrow{\nabla v}\ dx = \lambda \int_\Omega u\ v\ dx$$

pour tout $v \in \mathcal{V}^D$. Montrer que pour une valeur propre $\lambda$, si $u$ est solution de la formulation variationnelle alors elle est solution du problème aux limites (1). Dans la suite, on admet la réciproque.

**b.** Démontrer que les valeurs propres $\lambda$ sont réelles et strictement positives.

**c.** Démontrer que deux vecteurs propres $u_1$ et $u_2$ associés à deux valeurs propres différentes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ vérifient les égalités

$$\int_\Omega \overrightarrow{\nabla u_1}.\overrightarrow{\nabla u_2}\ dx = 0 \text{ et } \int_\Omega u_1\ u_2\ dx = 0.$$

**d.** On s'intéresse à la solution du problème de valeurs propres

$$-w'' = \mu w \text{ dans } I = ]0, 1[ \text{ et } w(0) = w(1) = 0. \tag{2}$$

On dit que $\mu$ est une valeur propre de l'application linéaire,

$$-\frac{d^2}{dx^2} : \begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \to & \mathcal{W} \\ w & \mapsto & -\dfrac{d^2 w}{dx^2} \end{array}$$

définie dans le sous-espace vectoriel de $\mathcal{W} = L^2(I)$ des fonctions à valeurs réelles qui vérifient $w'' \in \mathcal{W}$ et la condition $w(0) = w(1) = 0$. A chaque valeur propre $\mu$ il correspond des vecteurs propres $w$ qui sont des fonctions $x \to w(x)$. En s'inspirant des questions a) et b), montrer que toutes les valeurs propres $\mu$ sont réelles et strictement positives. On admet l'équivalence entre le problème aux limites (2) et sa formulation variationnelle.

**e.** Résoudre le problème de valeur propres (2) de façon analytique. Pour chaque $\mu$ solution, on trouvera le ou les vecteurs propres $w$ associés.

**f.** Résoudre le problème de valeur propre (1) de façon analytique. Pour chaque $\lambda$ solution, on trouvera le ou les vecteurs propres $u$ associés.

**g.** En supposant que la fonction $(x, y) \to f(x, y)$ est une combinaison linéaire $f = \sum_i \alpha_i u_i$ d'un nombre fini de vecteurs propres, utiliser les résultats précédents pour trouver une solution $\varphi$ du problème aux limites

$$-\Delta\varphi = f \text{ dans } \Omega \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

sous forme d'une combinaison linéaire $\varphi = \sum_i \beta_i u_i$ des mêmes vecteurs propres. On déterminera les coefficients $\beta_i$ en fonction des coefficients $\alpha_i$ et des valeurs propres $\lambda_i$.