

Examen du 21 juin 2023: 10h30-12h30

Exercice 1 Pour les équations aux dérivées partielles ci-dessous donner leur ordre, leur caractère linéaire ou non linéaire. Lorsque c'est possible, donner leur classification et les conditions initiales et aux limites qu'il faut leur ajouter pour qu'elles puissent être bien posées.

1. $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + u(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$

2. $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \sin u(x, t) = 0.$

3. $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + (2 + \cos(x)) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $\frac{ty'(t)}{y(t)} + 1 = t$ et $y(1) = 1$ par la méthode de séparation de variables.

2. $y'(t) + 4t^2 y(t) = t^2$ et $y(0) = 0$ par la méthode de décomposition en une solution particulière **constante** et une solution générale.

3. $y'(t) = y(t) + e^t$ et $y(0) = 0$ en utilisant la formule de Duhamel. **Avant de l'appliquer, on commencera par rappeler son énoncé en détaillant bien les hypothèses.**

Exercice 3 Soit le problème de Cauchy,

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

pour $t > 0$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$. Le coefficient $a(t)$ et la source $f(t)$ sont ε -périodiques et

$$a(t) = a_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \text{ et } f(t) = f_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

où a_0 et f_0 sont deux fonctions 1-périodiques et bornées.

1. Donner la définition de $T_\varepsilon f$ la transformation à deux échelle d'une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Calculer la transformation à deux échelles $T_\varepsilon a$ en fonction de a_0 et de τ .

3. On admet que la solution $t \mapsto y(t)$ est bornée uniformément par rapport à ε , et que $y_\varepsilon = T_\varepsilon y$ admet le développement asymptotique

$$y_\varepsilon(t, \tau) = y_0(t, \tau) + \varepsilon \bar{y}_1(t, \tau) + \varepsilon \{t\}_\varepsilon r(t) + o(\varepsilon).$$

Rappeler la formule d'approximation de $T_\varepsilon y'$ (sans démonstration) la transformation à deux échelles de la dérivée de y en fonction de termes du développement asymptotique.

4. En déduire (en justifiant bien) le modèle à deux échelles

$$\begin{aligned} \frac{dy_0(t)}{dt} + \frac{\partial y_1(t, \tau)}{\partial \tau} + a_0(\tau)y_0(t) &= f_0(\tau) \text{ pour } t > 0 \text{ et } \tau \in]0, 1[\\ y_0(0) &= y_0, y_1(t, 0) = y_1(t, 1) \text{ pour } t > 0 \end{aligned}$$

réglissant y_0 et y_1 . Bien s'assurer d'avoir défini y_1 en fonction de y_0 et de $\bar{y}_1$.

5. Pour chaque $t > 0$, le problème microscopique vérifié par y_1 est construit à partir de la solution $\tau \mapsto z(\tau)$ de l'équation

$$z'(\tau) = g(\tau) \text{ pour } \tau \in]0, 1[\text{ et } z(0) = z(1)$$

pour certaines fonctions $\tau \mapsto g(\tau)$ que l'on n'explicite pas ici. Ce problème peut être formulé sous forme variationnelle: $z \in L^2([0, 1])$ vérifie

$$\int_0^1 -z(\tau)v'(\tau) d\tau = \int_0^1 g(\tau)v(\tau) d\tau \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}_{per}$$

où $\mathcal{V}_{per} = \{v \in H^1([0, 1]) \text{ tel que } v(0) = v(1)\}$. Démontrer que si la fonction z est solution de la formulation variationnelle et qu'elle est dérivable sur $[0, 1]$ alors elle vérifie le problème microscopique.

Exercice 4 (Schéma numérique basé sur une méthode de décomposition) On considère le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) + g(t, x(t)) \text{ pour } t \in]0, 1[\\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où f et g sont deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, on suppose que les fonctions partielles $x \rightarrow f(t, x)$ et $x \rightarrow g(t, x)$ sont globalement lipschitziennes pour tout $t \in]0, 1[$.

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz global.
2. Démontrer que le problème de Cauchy admet une solution unique.
3. Montrer que les fonctions $f(t, x) = |x|$ et $g(t, x) = (1 + t) \times x$ vérifient les hypothèses faites sur f et g .
4. Écrire le schéma d'Euler explicite pour cette EDO pour un pas de temps $h > 0$.
5. Calculer les deux premiers pas x_1, x_2 du schéma d'Euler explicite en fonction de h pour la condition initiale $x_0 = 1$.
6. On considère les deux équations différentielles

$$y'(t) = f(t, y(t)) \text{ et } z'(t) = g(t, z(t))$$

et deux schémas à un pas pour leur résolution

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_y(t_n, y_n, h) \text{ et } z_{n+1} = z_n + h\Phi_z(t_n, z_n, h).$$

On suppose que ces deux schémas sont stables et consistants d'ordre 1. On propose le schéma suivant pour l'approximation de la solution $x(t)$. Il est construit avec deux suites intermédiaires k_n et r_n définies pour une valeur de $\theta \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} k_n &= x_n + \theta h\Phi_y(t_n, x_n, \frac{h}{2}), \\ r_n &= k_n + h\Phi_z(t_n, k_n, h) \\ \text{et } x_{n+1} &= r_n + (1 - \theta)h\Phi_y(t_n + \frac{h}{2}, r_n, \frac{h}{2}). \end{aligned}$$

Sans expliciter l'expression du Φ expliquer pourquoi ce schéma est un schéma à un pas.

7. Utiliser la condition nécessaire et suffisante vue en TD de consistance d'un schéma pour montrer que ce schéma à un pas est consistant. Il n'est pas demandé de redémontrer cette condition.

8. Dans le cas $\theta = 1$, montrer que ce schéma à un pas est stable.

9. Toujours dans le cas $\theta = 1$, montrer que ce schéma est convergent.