Examen du 26 juin 2024: 08h00-10h00

Exercice 1 Pour les équations aux dérivées partielles ci-dessous donner leur ordre et nombre de variables spatiales et temporelles. Préciser s'il s'agit d'équations linéaires ou non linéaires. Lorsque c'est possible, donner leur classification et les conditions initiales et aux limites qu'il faut leur ajouter pour qu'elles puissent être bien posées.
1. L'équation de Lin-Tsien : $2u_{tx} + u_x u_{xx} - u_{yy} = 0$.
2. L'équation de Sine-Gordon : $v_{tt} - v_{xx} + \sin v = 0$.
3. L'équation de Tricomi : $u_{yy} = y u_{xx}$.

Exercice 2

a. Donner la définition de $e^{\mathbf{A}}$ et démontrer que $\dfrac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$ pour une matrice $\mathbf{A}$ carrée et diagonalisable.

b. Considérons $\mathbf{A}$ une matrice 2×2 ayant 1 et 2 pour valeurs propres et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres associés. Calculez $e^{\mathbf{A}t}$.

c. A l'aide de la formule de Duhamel en déduire la solution du problème de Cauchy $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}$ pour $t > 0$ et $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un résultat obtenu avec autre méthode n'est pas compté.

Exercice 3

a. Utilisez deux itérations du schéma d'Euler explicite avec un pas de temps $h = 0,2$ pour trouver une valeur approchée de $y(1,4)$ où y est solution du problème de Cauchy

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) - t \text{ pour } t > 1 \text{ et } y(1) = 3.$$

b. Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz global pour démontrer que ce problème admet une solution unique.

c. Vérifier que la solution générale de l'équation différentielle est $y(t) = ce^t + t + 1$, où c est une constante (il n'est pas demandé d'établir cette solution, mais seulement de vérifier qu'elle est bien solution). En déduire la solution du problème de Cauchy. Puis, calculer l'**erreur de consistance** du schéma d'Euler explicite pour cette EDO à l'issue du second pas pour $h = 0,2$.

d. Démontrer la consistance du schéma d'Euler explicite pour cette EDO.

e. Démontrer la stabilité du schéma d'Euler explicite pour cette EDO. En déduire sa convergence.

Exercice 4
1. Donner la définition détaillée de la transformation à deux échelles T_ε définie sur l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.
2. Démontrer que pour une fonction u dérivable sur $[0,1]$

$$(T_\varepsilon u')(t,\tau) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \tau}(T_\varepsilon u)(t,\tau).$$

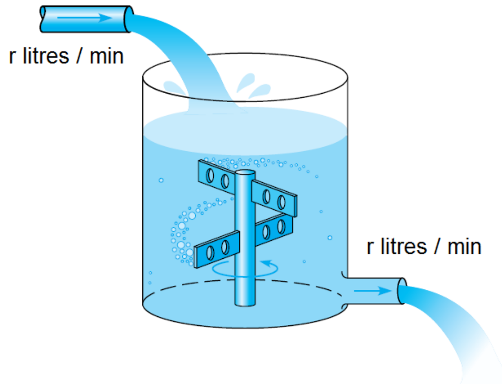

Figure 1: Le réservoir d'eau de l'exercice 3.

Exercice 5 A l'instant $t = 0$, un réservoir contient Q_0 grammes de sel dissous dans 100 litres d'eau. On suppose que de l'eau contenant 14 grammes de sel par litre pénètre dans le réservoir à raison de r litres par minutes et que le mélange bien agité s'écoule du réservoir au même débit.

a. Etablir le problème de Cauchy dont est solution la quantité $Q(t)$ de sel dans le réservoir à chaque instant t.

b. Déterminer $Q(t)$.

c. Déterminer également la quantité limite Q_L présente après un temps très long.