

Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

MT28 – Modèles mathématiques et méthodes numériques

EXAMEN

Printemps 2026

Durée : 2 heures – Documents non autorisés

Exercice 1 – Questions de cours

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz global pour le problème de Cauchy

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

2. Étant donné un schéma à un pas pour la résolution d'une équation différentielle ordinaire. Donner la définition de l'erreur de consistance ε_n pour un pas du schéma.
3. Énoncer le premier principe fondamental utilisé pour les formulations variationnelles de problèmes aux limites.

Exercice 2 – Questions à choix multiples

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes. Justifier succinctement.

QCM 1. Pour l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t, x) - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t, x) = 0 \quad \text{pour } t > 0, x \in (0, L),$$

quelles conditions faut-il imposer pour assurer l'existence et l'unicité de la solution ?

- (a) Deux conditions initiales (sur T et $\partial T / \partial t$) et aucune condition aux limites.
- (b) Une condition initiale et deux conditions aux limites (une en $x = 0$ et une en $x = L$).
- (c) Deux conditions initiales et deux conditions aux limites.
- (d) Une condition initiale seulement, sans condition aux limites.

QCM 2. On résout une même EDO par le schéma d'Euler explicite (ordre 1) et par le schéma de Crank-Nicolson (ordre 2). On divise le pas de temps h par 2. Comment évoluent approximativement les erreurs maximales $\max_n |y(t_n) - y_n|$?

- (a) Euler : erreur divisée par 2 ; Crank-Nicolson : erreur divisée par 2.
- (b) Euler : erreur divisée par 2 ; Crank-Nicolson : erreur divisée par 4.

- (c) Euler : erreur divisée par 4 ; Crank-Nicolson : erreur divisée par 4.
 (d) Euler : erreur divisée par 4 ; Crank-Nicolson : erreur divisée par 8.

QCM 3. Parmi les EDO suivantes, quelles sont celles à **variables séparables** ?

- (a) $y'(t) = y(t) + t$
 (b) $y'(t) = t y^2(t)$
 (c) $y'(t) = \sin(y(t) + t)$
 (d) $y'(t) = y(t) + t y^2(t)$

Exercice 3 – Système de deux réservoirs

Deux réservoirs se vidant dans une même conduite ont des niveaux $n_1(t)$ et $n_2(t)$ régis par

$$\begin{cases} n_1'(t) = -2n_1(t) + n_2(t) + q_1, \\ n_2'(t) = n_1(t) - 2n_2(t) + q_2, \end{cases}$$

avec les conditions initiales $n_1(0) = n_2(0) = 0$ et les débits constants $q_1 = 1$ et $q_2 = 0$.

- a) Vérifier que le système s'écrit sous forme vectorielle $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}$.
 b) Chercher une solution particulière $\mathbf{x}_p$ du système non homogène.
 c) Déterminer la solution vérifiant $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.
 d) Calculer les niveaux d'équilibre $\lim_{t \rightarrow +\infty} n_1(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} n_2(t)$. Commenter.

Exercice 4 – Étude du schéma de Heun

On considère le problème de Cauchy $y'(t) = F(t, y(t))$ pour $t \in]0, T]$ avec $y(0) = y^0$, et on suppose que F est indéfiniment dérivable et lipschitzienne en y .

Le **schéma de Heun** est défini par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[F(t_n, y_n) + F(t_n + h, y_n + h F(t_n, y_n)) \right].$$

- a) Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.
 b) Écrire ce schéma sous la forme générale $y_{n+1} = y_n + h \Phi(t_n, y_n, h)$ en explicitant la fonction $\Phi(t, y, h)$.
 c) Vérifier que la condition de consistance d'ordre 1,

$$F(t, y) = \Phi(t, y, 0),$$

est satisfaite.

- d) On rappelle la condition suffisante de consistance d'ordre 2 :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) F(t, y) = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0).$$

Calculer $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, y, 0)$ et vérifier que cette condition est satisfaite. En déduire l'ordre de consistance du schéma.

- e) On applique le schéma de Heun à l'équation $y'(t) = \lambda y(t)$ avec $\lambda < 0$. Montrer que $y_{n+1} = A(\mu) y_n$ où $\mu = h\lambda$ et expliciter le **facteur d'amplification** $A(\mu)$.
- f) Déterminer la condition sur h (en fonction de $|\lambda|$) pour que le schéma soit absolument stable.

Exercice 5 – Formulations variationnelles

On considère le problème de convection-diffusion sous forme non-conservative avec conditions de Dirichlet posé dans l'intervalle $\Omega =]a, b[$,

$$\begin{cases} -(a_\varepsilon u'_\varepsilon)' + b_\varepsilon u'_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où $a_\varepsilon(x) = a^0(x/\varepsilon)$, $b_\varepsilon(x) = b^0(x/\varepsilon)$ avec $a^0(y)$, $b^0(y)$ des fonctions 1-périodiques vérifiant $a^0 > 0$. On suppose $T_\varepsilon(f)(x, y) = f^0(x, y) + o(1)$.

On rappelle les espaces de fonctions admissibles, pour $Y =]0, 1[$,

$$\mathcal{V}^D = \{v \in H^1(\Omega) \mid v(a) = v(b) = 0\},$$

$$\mathcal{V}_{\text{per}} = \left\{ v \in L^2(\Omega \times Y) \mid \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega \times Y) \text{ et } v(x, 0) = v(x, 1) \text{ pour tout } x \in \Omega \right\},$$

$$\mathcal{W}_{\text{per}} = \{w \in H^1(Y) \mid w(0) = w(1)\}.$$

On admet que la méthode d'homogénéisation périodique conduit au **modèle à deux échelles** suivant : trouver $(u^0, u^1) \in \mathcal{V}^D \times \mathcal{V}_{\text{per}}$ tel que

$$\int_{\Omega} \int_0^1 a^0 \left(\frac{du^0}{dx} + \frac{\partial u^1}{\partial y} \right) \left(\frac{dv^0}{dx} + \frac{\partial v^1}{\partial y} \right) dy dx + \int_{\Omega} \int_0^1 b^0 \left(\frac{du^0}{dx} + \frac{\partial u^1}{\partial y} \right) v^0 dy dx = \int_{\Omega} \int_0^1 f^0 v^0 dy dx \quad (2)$$

pour tout $(v^0, v^1) \in \mathcal{V}^D \times \mathcal{V}_{\text{per}}$, où $u^0(x)$ est indépendant de y .

a. Montrer que u^1 est solution du problème cellulaire : pour tout $w \in \mathcal{W}_{\text{per}}$,

$$\int_0^1 a^0 \frac{\partial u^1}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy = - \frac{du^0}{dx} \int_0^1 a^0 \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad (3)$$

pour tout $x \in \Omega$.

b. On introduit la fonction $\theta(y) \in \mathcal{W}_{\text{per}}$ solution de

$$\int_0^1 a^0 \theta' w' dy = - \int_0^1 a^0 w' dy \quad \text{pour tout } w \in \mathcal{W}_{\text{per}}. \quad (4)$$

Établir la relation entre $u^1(x, y)$ et $\theta(y)$.

c. Montrer que $u^0 \in \mathcal{V}^D$ satisfait la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} a^H \frac{du^0}{dx} \frac{dv^0}{dx} dx + \int_{\Omega} b^H \frac{du^0}{dx} v^0 dx = \int_{\Omega} f^H v^0 dx \quad \text{pour tout } v^0 \in \mathcal{V}^D,$$

où l'on précisera les expressions des coefficients homogénéisés a^H , b^H et du second membre homogénéisé $f^H(x)$.

d. En déduire le problème aux limites (formulation forte) vérifié par u^0 . Commenter la structure de l'équation obtenue par rapport au problème initial (1).