

Corrigé de l'examen final de MT2A-MT2B-MT2D

Printemps 2026

Exercice 1 : algèbre linéaire

(10 points)

1. (a) La matrice A est diagonale avec des coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible et son inverse est la matrice diagonale suivante :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

- (b) Calculons B^2 :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Donc $BB = I_3$ ce qui montre que B est inversible et que $\boxed{B^{-1} = B}$.

- (c) Calculons $A + B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On résout l'équation matricielle d'inconnue X suivante : $(A + B)X = Y$

$$\begin{aligned} (A + B)X = Y &\iff \begin{cases} x + z = a \\ 2y = b \\ x + 2z = c \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} x = a - z \\ y = b/2 \\ z = c - a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2a + 0b + (-1)c \\ y = 0a + \frac{1}{2}b + 0c \\ z = (-1)a + 0b + 1c \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \end{aligned}$$

Donc $A + B$ est inversible et

$$\boxed{(A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(d) Soient λ, μ, ν des réels tels que $\lambda A^{-1} + \mu B^{-1} + \nu(A + B)^{-1} = \mathbb{O}_3$.

$$\text{Alors} \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_3$$

$$\text{D'où} \quad \begin{pmatrix} \lambda + 2\nu & 0 & \mu - \nu \\ 0 & \lambda + \mu + \frac{\nu}{2} & 0 \\ \mu - \nu & 0 & \frac{\lambda}{2} + \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, par identification coefficient par coefficient, on obtient le système d'égalités suivantes :

$$\begin{cases} \lambda + 2\nu = 0 \\ \mu - \nu = 0 \\ \lambda + \mu + \frac{\nu}{2} = 0 \\ \frac{\lambda}{2} + \nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2\nu \\ \mu = \nu \\ \lambda = -\frac{3}{2}\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2\nu \\ \mu = \nu \\ -2\nu = -\frac{3}{2}\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2\nu \\ \mu = \nu \\ \nu = 0 \end{cases}$$

Donc $\lambda = \mu = \nu = 0$

Ainsi la famille $(A^{-1}, B^{-1}, (A + B)^{-1})$ est libre.

En particulier $(A + B)^{-1}$ n'est pas combinaison linéaire de A^{-1} et B^{-1} .

2. (a) Nous avons : $\text{tr}(I_n) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n$.

$$\text{D'où} \quad \varphi(I_n) = \text{tr}(I_n) I_n - I_n = n I_n - I_n = \boxed{(n - 1)I_n}$$

(b) Soient M et N deux matrices appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

On remarque d'abord que $\varphi(M)$ appartient à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. De plus

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + N) &= \text{tr}(\lambda M + N) I_n - (\lambda M + N) \\ &= (\lambda \text{tr}(M) + \text{tr}(N)) I_n - \lambda M - N \text{ par linéarité de l'application trace} \\ &= \lambda(\text{tr}(M) I_n - M) + (\text{tr}(N) I_n - N) \\ &= \lambda \varphi(M) + \varphi(N) \end{aligned}$$

Donc φ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) Calculons :

$$\text{tr}(\varphi(M)) = \text{tr}(\text{tr}(M) I_n - M) = \text{tr}(M) \text{tr}(I_n) - \text{tr}(M)$$

Or $\text{tr}(I_n) = n$, donc :

$$\boxed{\text{tr}(\varphi(M)) = (n - 1) \text{tr}(M)}$$

(d) Si $M \in \text{Ker}(\varphi)$ alors $\varphi(M) = \mathbf{O}_n$ par définition du noyau d'une application linéaire.

$$\text{Donc } \text{tr}(\varphi(M)) = \text{tr}(\mathbf{O}_n) = 0$$

D'où, d'après la question précédente, $(n-1)\text{tr}(M) = \text{tr}(\varphi(M)) = 0$.

Comme $n \geq 2$, on a $n-1 \neq 0$ donc :

$$\boxed{\text{tr}(M) = 0}$$

(e) Par définition du noyau :

$$M \in \text{Ker}(\varphi) \iff \varphi(M) = \mathbf{O}_n \iff \text{tr}(M)I_n - M = 0 \iff M = \text{tr}(M)I_n$$

Or, si $M \in \text{Ker}(\varphi)$ alors $\text{tr}(M) = 0$.

Donc, si $M \in \text{Ker}(\varphi)$ alors $M = 0 \cdot I_n = \mathbf{O}_n$. Ainsi $\text{Ker}(\varphi) \subset \{\mathbf{O}_n\}$.

De plus, l'inclusion réciproque $\{\mathbf{O}_n\} \subset \text{Ker}(\varphi)$ est toujours vraie. Finalement

$$\boxed{\text{Ker}(\varphi) = \{\mathbf{O}_n\}}$$

Par conséquent φ est injective. Comme les espaces de départ et d'arrivée de φ sont identiques et **de même dimension finie**, φ est bijective (conséquence de la formule du rang).

3. On suppose $n = 2$.

(a) Calculons les images par φ des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$:

$$\varphi(E_1) = 1I_2 - E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

$$\varphi(E_2) = 0I_2 - E_2 = -E_2$$

$$\varphi(E_3) = 0I_2 - E_3 = -E_3$$

$$\varphi(E_4) = 1I_2 - E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1$$

Donc :

$$\boxed{S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) On trouve immédiatement $\boxed{S^2 = I_4}$

Donc S est inversible et $S^{-1} = S$.

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))^{-1} = S^{-1} = S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Or on sait que l'application $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est bijective de $\mathcal{L}(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}))$ vers $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$.

En particulier, elle est injective. Ainsi $\boxed{\varphi^{-1} = \varphi}$

(c) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\text{Alors } \varphi(M) = \text{tr}(M)I_2 - M = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

On en déduit que

$$M\varphi(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{M\varphi(M) = \det(M)I_2}$$

(d) Supposons $\det(M) \neq 0$. Alors $M \left(\frac{1}{\det(M)} \cdot \varphi(M) \right) = I_2$ où $\frac{1}{\det(M)} \cdot \varphi(M)$ est une matrice carrée de même taille que M .
Donc M est inversible et

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \varphi(M)}$$

(e) Soient A et B deux matrices inversibles telles que $\det(A+B) \neq 0$.
On applique le résultat précédent :

$$\begin{aligned} (A+B)^{-1} &= \frac{1}{\det(A+B)} \varphi(A+B) \\ &= \frac{1}{\det(A+B)} (\varphi(A) + \varphi(B)) \text{ par linéarité de } \varphi \\ &= \frac{1}{\det(A+B)} \varphi(A) + \frac{1}{\det(A+B)} \varphi(B) \end{aligned}$$

$$\text{Or } A\varphi(A) = \det(A) \cdot I_2 \implies \varphi(A) = A^{-1} (\det(A) \cdot I_2) = \det(A) A^{-1}$$

$$\text{De même, } \varphi(B) = \det(B) B^{-1}.$$

Donc

$$\boxed{(A+B)^{-1} = \frac{\det(A)}{\det(A+B)} A^{-1} + \frac{\det(B)}{\det(A+B)} B^{-1}}$$

Exercice 2 : analyse

(10 points)

On rappelle que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + xy > 0\} \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = x + \ln(1 + xy).$$

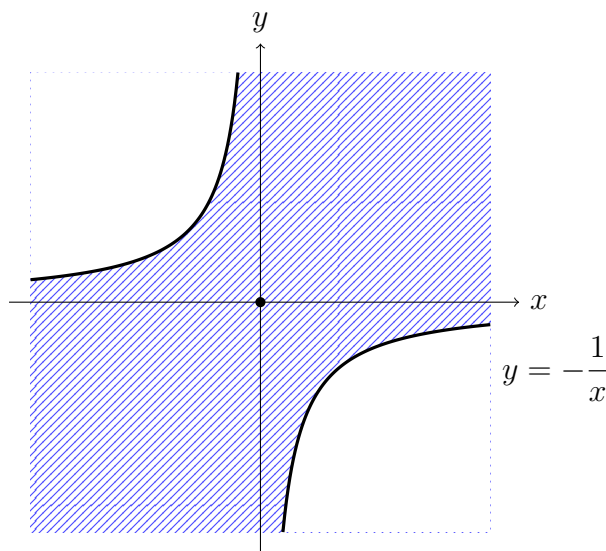
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{D}$.

1. Représentation de $\mathcal{D}$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \mathcal{D} \iff 1 + xy > 0 \iff xy > -1.$$

Si $x = 0$, quel que soit y réel, $xy > -1$. Si $x \neq 0$, la courbe d'équation $y = -\frac{1}{x}$ (c'est-à-dire $xy = -1$) est la frontière de $\mathcal{D}$. Le domaine $\mathcal{D}$ est la région *située strictement entre les deux branches* de l'hyperbole (celle qui contient l'origine et les deux axes) :



2.

(a) Gradient.

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 + \frac{y}{1 + xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{1 + xy}.$$

Donc
$$\nabla f(x, y) = \left(1 + \frac{y}{1 + xy}, \frac{x}{1 + xy} \right).$$

(b) Point critique.

Un point $(x, y) \in \mathcal{D}$ est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases} &\iff \begin{cases} 1 + \frac{y}{1+xy} = 0 \\ \frac{x}{1+xy} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + \frac{y}{1+xy} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 1 + \frac{y}{1+0} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (0, -1) \end{aligned}$$

Le couple $a = (0, -1)$ vérifie $1 + 0 \times (-1) = 1 > 0$, donc $a \in \mathcal{D}$.

Donc f admet un **unique** point critique sur $\mathcal{D}$: $a = (x_0, y_0) = (0, -1)$.

- (c) **Matrice hessienne et nature de a .** On calcule les dérivées partielles secondes pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -\frac{y^2}{(1+xy)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -\frac{x^2}{(1+xy)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{(1+xy) - y \cdot x}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}. \end{aligned}$$

En $a = (0, -1)$, on a $1 + xy = 1$, d'où

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Introduisons les notations de Monge en a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

On a alors $r = -1$, $s = 1$, $t = 0$ et donc :

$$rt - s^2 = (-1) \times 0 - 1^2 = -1 < 0.$$

Ainsi, le point critique $a = (0, -1)$ est un **point col** (ou point selle).

3.

- (a) **Caractérisation de $\mathcal{L}$ pour $x \neq 0$.**

Soit $x \neq 0$. On raisonne par double implication.

• **Sens direct.**

Si $(x, y) \in \mathcal{L}$, alors $1 + xy > 0$ et $x + \ln(1 + xy) = 0$, donc $\ln(1 + xy) = -x$, puis $1 + xy = e^{-x}$. Ainsi $xy = e^{-x} - 1$ et, comme $x \neq 0$,

$$y = \frac{e^{-x} - 1}{x} = g(x).$$

• **Sens réciproque.**

Si $y = g(x)$ avec $x \neq 0$, alors $xy = e^{-x} - 1$, donc $1 + xy = e^{-x} > 0$: le point (x, y) appartient à $\mathcal{D}$, et

$$f(x, y) = x + \ln(e^{-x}) = x - x = 0,$$

donc $(x, y) \in \mathcal{L}$.

Donc pour $x \neq 0$: $(x, y) \in \mathcal{L} \iff y = g(x)$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} x \neq 0 \\ (x, y) \in \mathcal{L} \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ y = g(x) \end{cases}}$$

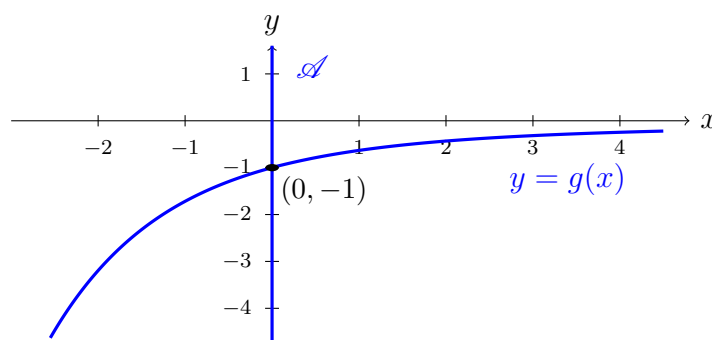
(b) **Tracé de la ligne de niveau $\mathcal{L}$.**

Il ne faut pas oublier le cas $x = 0$: pour tout réel y il est clair que $(0, y) \in \mathcal{D}$ et $f(0, y) = 0 + \ln(1) = 0$, donc $(0, y) \in \mathcal{L}$. Notons

$$\mathcal{A} = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$$

l'axe des ordonnées ; il est donc *tout entier* contenu dans $\mathcal{L}$. Finalement

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{A} \cup \{(x, g(x)), x \neq 0\}.$$



La ligne de niveau $\mathcal{L}$ est tracée **en bleu** : elle est constituée de la courbe $y = g(x)$ et de la droite $\mathcal{A}$ d'équation $x = 0$.

(c) **Développement limité de g à l'ordre 2 en 0.**

On a, au voisinage de 0,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,$$

donc $e^{-x} - 1 = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$, et en divisant par x :

$$\boxed{g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x).$$

(On retrouve bien $g(0) = -1$, ce qui confirme la continuité de g en 0.)

4. On pose $G(x) = \int_0^x g(t) dt$, avec g continue sur $\mathbb{R}$.

(a) **Dérivabilité de G .**

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$, G est l'unique primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Par conséquent, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = g(x)}.$$

Donc, puisque $G' = g$ et que g est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction G' est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

(b) **Une autre expression de $G(x)$ pour $x > 0$.**

Soit $x > 0$. Par définition, $G(x) = \int_0^x g(t) dt$. D'après la relation de Chasles,

$$G(x) = \int_0^1 g(t) dt + \int_1^x g(t) dt = G(1) + \int_1^x g(t) dt.$$

Pour t compris entre 1 et x (donc $t > 0$, $t \neq 0$), on a $g(t) = \frac{e^{-t} - 1}{t} = \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t}$, d'où

$$\int_1^x g(t) dt = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - [\ln t]_1^x = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(x).$$

$$\text{Donc } \boxed{G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(x)}.$$

(c) D'après la question (b),

$$\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = G(x) - G(1) + \ln(x),$$

et donc, en échangeant les bornes,

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln(x) + G(1) - G(x). \quad (\star)$$

Il reste à développer G à l'ordre 3 en 0. En intégrant terme à terme le développement limité de g à l'ordre 2 obtenu en **3.(c)**, on obtient :

$$G(x) = G(0) - x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_2(x) = -x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{18} + x^3 \varepsilon_2(x),$$

puisque $G(0) = 0$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$. On reporte dans $(\star)$:

$$\boxed{\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln(x) + G(1) + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + x^3 \varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0.}$$

C'est bien l'égalité demandée.