

NOM : _____ Prénom : _____ Groupe : _____



Examen final

MT2A-MT2B-MT2D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Chaque étudiant rendra 2 copies (une copie pour l'exercice 1, une copie pour l'exercice 2) ainsi que l'énoncé du sujet pour l'exercice 2.

Exercice 1 : algèbre linéaire (10 points)

1. On se donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Donner sans justification l'inverse de A .
- Calculer B^2 . En déduire l'inverse de B .
- Montrer que $A + B$ est inversible et calculer $(A + B)^{-1}$.
- Prouver que la famille $(A^{-1}, B^{-1}, (A + B)^{-1})$ est libre.

La matrice $(A + B)^{-1}$ est-elle combinaison linéaire de A^{-1} et de B^{-1} ?

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et I_n la matrice identité d'ordre n .

On appelle trace d'une matrice carrée M appartenant à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, le nombre réel noté $\text{tr}(M)$ égal à la somme de ses n coefficients diagonaux.

Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ alors $\text{tr}(M) = 1 + 5 + 9 = 15$.

On admet que l'application «trace» $\text{tr} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.
 $M \longmapsto \text{tr}(M)$

On définit l'application $\varphi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
 $M \longmapsto \text{tr}(M) I_n - M$

- Simplifier $\varphi(I_n)$.
- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- Exprimer $\text{tr}(\varphi(M))$ en fonction de $\text{tr}(M)$ et de n .
- En déduire que si une matrice M appartient à $\text{Ker}(\varphi)$ alors $\text{tr}(M) = 0$.
- Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$. En déduire que φ est bijective.

3. On suppose dorénavant que $n = 2$.

L'espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On appelle déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, le nombre réel noté $\det(M)$, défini par : $\det(M) = ad - bc$.

On rappelle que : $\forall M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \operatorname{tr}(M) I_2 - M$

(a) Déterminer la matrice S de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Calculer S^2 . Que peut-on en déduire pour φ^{-1} ?

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Exprimer $\varphi(M)$ comme un tableau de nombres puis vérifier que

$$M \varphi(M) = \det(M) I_2$$

(d) Déduire de cette égalité que si $\det(M) \neq 0$ alors M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \varphi(M)$$

(e) Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det(A + B) \neq 0$.
Prouver que :

$$(A + B)^{-1} = \frac{\det(A)}{\det(A + B)} A^{-1} + \frac{\det(B)}{\det(A + B)} B^{-1}$$

Changer de copie pour rédiger l'exercice 2

Exercice 2 : analyse

(10 points)

On note $\mathcal{D}$ la partie de $\mathbb{R}^2$:

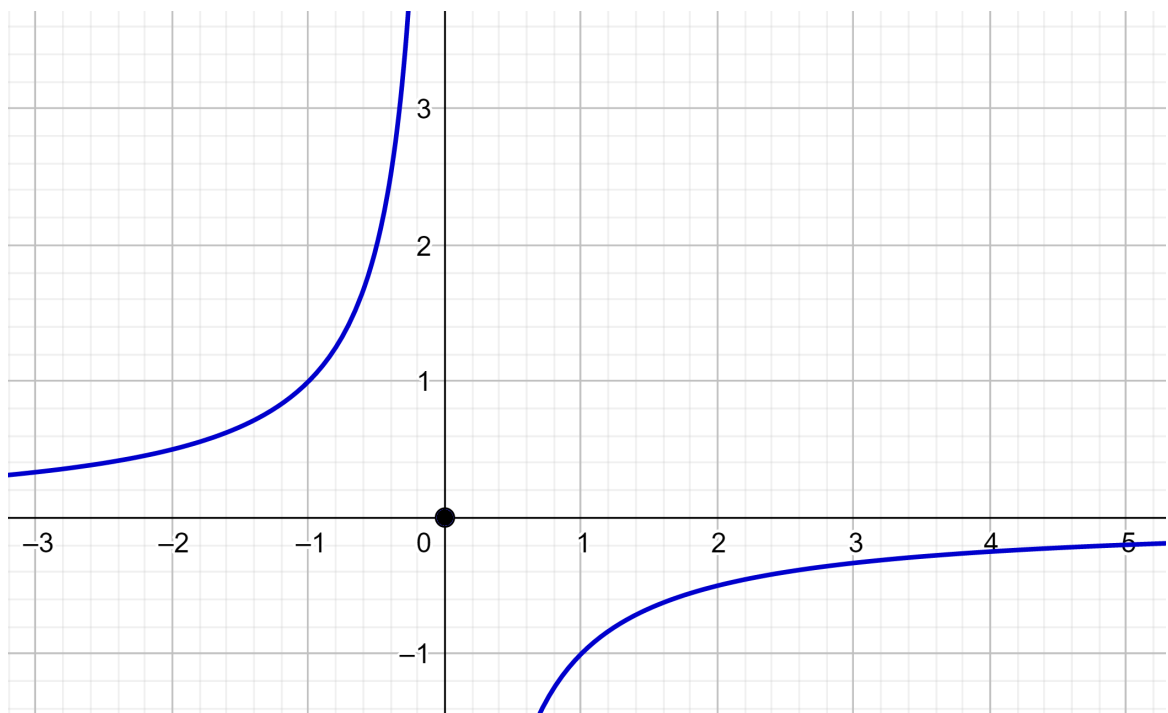
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + xy > 0\}$$

On considère la fonction f de deux variables réelles, définie sur l'ouvert $\mathcal{D}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = x + \ln(1 + xy)$$

On admet que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.

- On a représenté ci-dessous la courbe d'équation $y = -\frac{1}{x}$ dans un repère orthonormal du plan. Hachurer en bleu l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) appartiennent à $\mathcal{D}$.



- Calculer le vecteur gradient $\nabla f(x, y)$ en tout couple $(x, y) \in \mathcal{D}$.
 - Montrer que f admet un unique point critique $a = (x_0, y_0)$ dans $\mathcal{D}$.
 - Calculer la matrice hessienne $H_f(a)$ puis déterminer la nature du point critique a .

3. On appelle ligne de niveau zéro de la fonction f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = 0\}$$

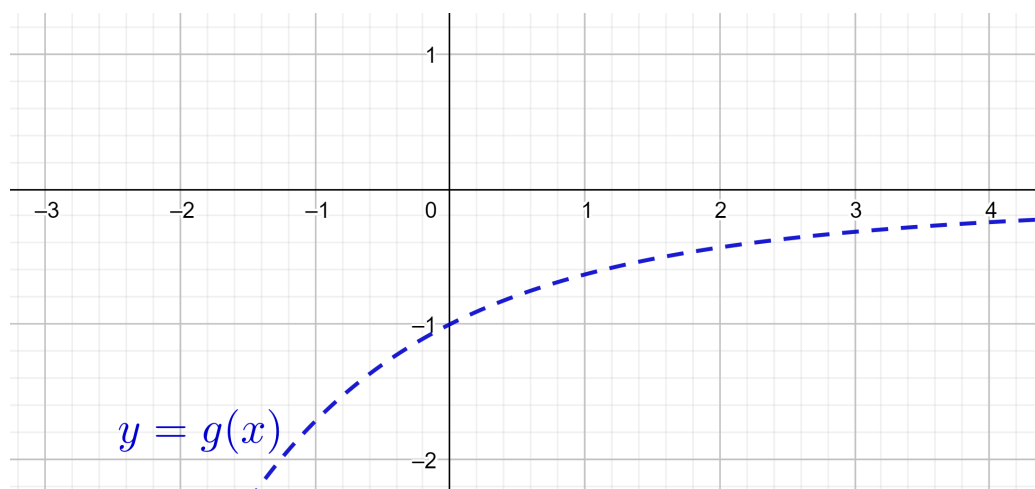
On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x} \quad \text{et} \quad g(0) = -1$$

(a) Montrer que

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathcal{L} \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = g(x) \\ x \neq 0 \end{cases}$$

(b) Sur la figure ci-dessous, tracer en bleu la ligne $\mathcal{L}$ de niveau 0 de f en entier.



(c) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction g .

4. On admet que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout réel x ,

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt$$

(a) Justifier que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner $G'(x)$ pour tout réel x .
La fonction G est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

(b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(x)$$

(c) Démontrer, en utilisant 3.(c), que pour tout réel $x > 0$ voisin de 0, on a :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln(x) + G(1) + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$