Examen final

MT2A-MT2B-MT2D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite. Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Partie A : à rédiger sur une feuille à part

Exercice 1 : algèbre linéaire (7 points)

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(2), P(3)) \end{array}$$

1. (a) Vérifier que f est une application linéaire.
   (b) Déterminer son noyau. En déduire que f est bijective.
2. Pour chaque entier $i \in [\![1, 3]\!]$, on pose $Q_i = f^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par f est e_i.
   (a) Justifier que $\mathscr{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de E.
   (b) Soit P un polynôme quelconque de E. En remarquant que $P = f^{-1}\big(f(P)\big)$, déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Dans la suite de l'exercice, on note M la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. *On ne demande pas de calculer cette matrice M.*
   Expliciter M^{-1} en utilisant la question 2.(b).
4. (a) On rappelle que $f(Q_2) = e_2$. Donner les valeurs de $Q_2(1)$, $Q_2(2)$ et $Q_2(3)$.
   Calculer le polynôme $Q_2(X)$ sous forme développée.
   (b) En déduire la deuxième colonne de M.

Partie B : à rédiger sur une feuille à part

Exercice 2 : développements limités ($3,5$ points)

On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2\sqrt{1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}}{x-1}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction :

$$g \ : \ h \mapsto \frac{\sqrt{1+\sin(h)}}{1-h}.$$

2. En déduire que pour x au voisinage de $+\infty$ on a :

$$f(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{11}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0.$$

3. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote Δ dont on précisera l'équation.
4. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 : intégration ($3,5$ points)

On admet qu'il existe une fonction $\varphi \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

1. Calculer $\varphi(0)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) En utilisant la propriété $(\star)$, démontrer l'égalité ci-dessous :

$$\varphi(x) = \int_0^1 \varphi(x+y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

   (b) À l'aide d'un changement de variable simple, en déduire l'égalité :

$$\varphi(x) = \int_x^{x+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

3. En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout réel x.
4. À l'aide des questions 3. et 1., prouver que φ est une fonction linéaire.

Partie C : à rédiger sur une feuille à part

Exercice 4 : fonctions de deux variables (7 points)

Soit f la fonction donnée par :

$$f\colon (x,y) \mapsto \arccos(x^2+y^2)$$

Dans tout l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Soit t un nombre réel et $\mathscr{L}_t$ la ligne de niveau t de f.
   (a) Justifier que $\mathscr{L}_t$ est vide lorsque $t \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Déterminer $\mathscr{L}_t$ lorsque $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Indiquer dans la figure 1 la surface qui représente la fonction f
   (on ne demande pas de justification).
4. On note U l'intérieur du disque unité :

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x^2+y^2 < 1\right\}$$

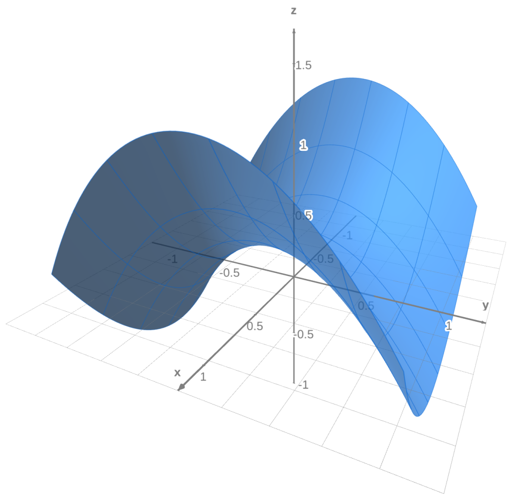
   et on admet que f admet des dérivées partielles sur U.
   (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f en tout point (x,y) de U.
   (b) Donner l'équation réduite du plan tangent à la surface représentative de f au point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$.
   (c) Démontrer que f admet $(0,0)$ comme unique point critique sur U.
   (d) Calculer $f(0,0)$ et en déduire que f admet un maximum global en $(0,0)$.
5. Dans cette question, on admettra et on utilisera le résultat suivant :
   soit (Σ) un solide compris entre les plans d'équations $z=a$ et $z=b$ où a et b sont deux réels tels que $a<b$. Si, pour tout réel $t \in [a,b]$, on note $A(t)$ l'aire de la section de (Σ) par le plan d'équation $z=t$, et si la fonction $t \mapsto A(t)$ est continue sur le segment $[a,b]$, alors le volume $v(\Sigma)$ du solide (Σ) est donné par l'intégrale :

$$v(\Sigma) = \int_a^b A(t)\,\mathrm{d}t$$

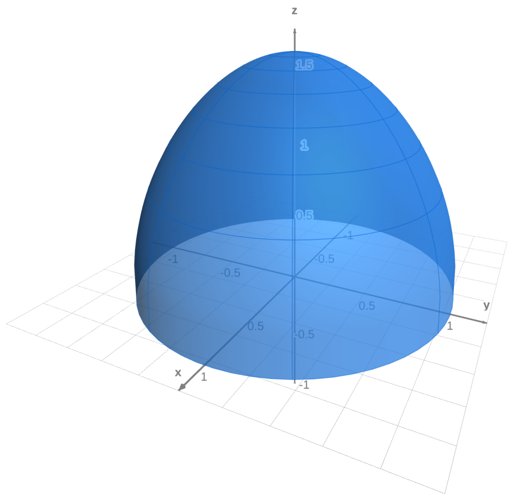
   On pourra se référer à la figure 2 pour une illustration de ce résultat.

   On cherche ici à calculer le volume du solide (Σ) situé au-dessus du plan $(0xy)$ et en dessous de la surface représentative de f.

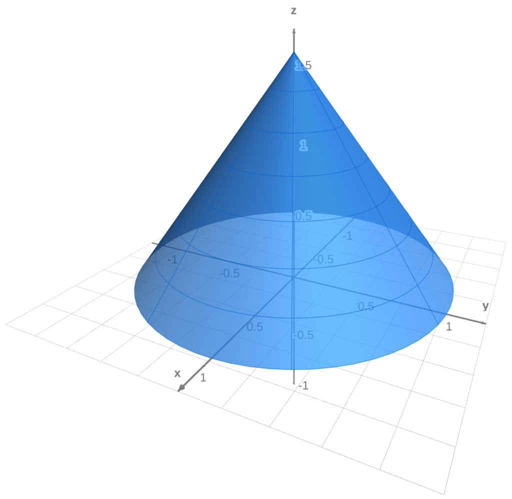
   (a) Soit t un nombre réel tel que $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'aire $A(t)$ de la section de (Σ) par le plan d'équation $z=t$.
   (b) En déduire le volume recherché.



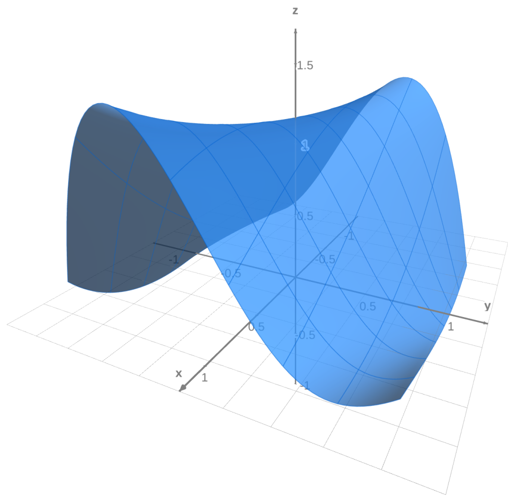
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 1 – Quel graphe correspond au tracé de la surface représentative de f ?

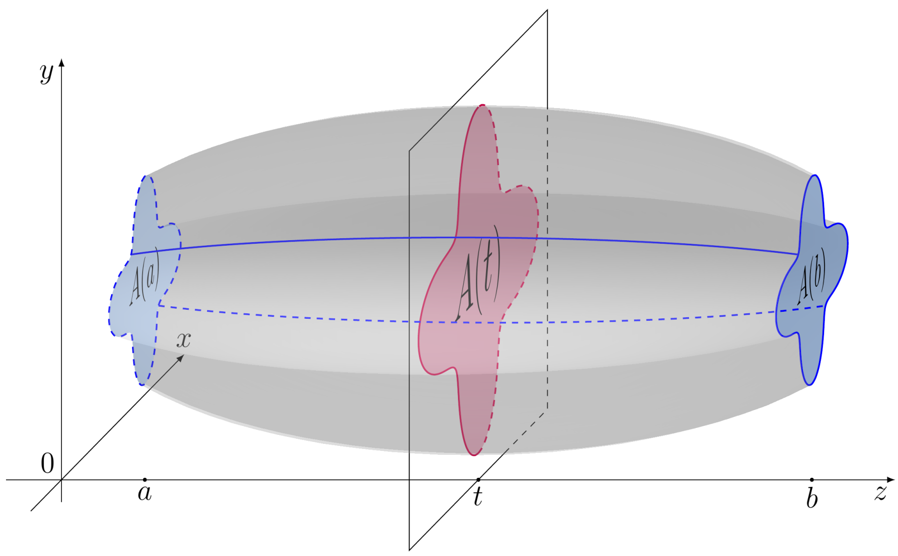


FIGURE 2 – Calcul d'un volume d'un solide par découpage selon l'axe (Oz)

Corrigé de l'examen final

MT2A-MT2B-MT2D

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit l'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P(X) & \longmapsto & \big(P(1)\,,\,P(2)\,,\,P(3)\big). \end{array}$$

1. (a) Soient Q et R deux polynômes appartenant à E. Soit λ un nombre réel.

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda\cdot Q+R) & = & \big((\lambda\cdot Q+R)(1)\,,\,(\lambda\cdot Q+R)(2)\,,\,(\lambda\cdot Q+R)(3)\big) \\ & = & \big(\lambda\, Q(1)+R(1)\,,\,\lambda\, Q(2)+R(2)\,,\,\lambda\, Q(3)+R(3)\big) \\ & = & \big(\lambda\, Q(1)\,,\,\lambda\, Q(2)\,,\,\lambda\, Q(3)\big)+\big(R(1),R(2),R(3)\big) \\ & = & \lambda\cdot\big(Q(1),Q(2),Q(3)\big)+\big(R(1),R(2),R(3)\big) \\ & = & \lambda\cdot f(Q)+f(R) \end{array}$$

   Donc f est une application linéaire.

   (b) Soit $P \in \mathrm{Ker} f$. Alors $f(P) = (0,0,0)$. D'où $(P(1), P(2), P(3)) = (0,0,0)$ puis $P(1) = P(2) = P(3) = 0$.
   Donc P est un polynôme de degré au plus 2, qui admet au moins 3 racines deux à deux distinctes.
   Par conséquent P ne peut être que le polynôme nul.
   Ainsi $P = 0_E$ et $\mathrm{Ker} f \subset \{0_E\}$. Or l'inclusion $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker} f$ est connue.
   Donc $\boxed{\mathrm{Ker} f = \{0_E\}}$ ce qui revient à dire que f est injective.

   De plus f est une application linéaire entre deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels de même dimension finie, égale à 3. L'injectivité de f entraîne sa bijectivité.
   Finalement f est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^3$.

2. Pour chaque entier $i \in [\![1, 3]\!]$, on pose $Q_i = f^{-1}(e_i)$.

   (a) On sait que la bijection réciproque de f, notée f^{-1}, est une application **linéaire bijective** de $\mathbb{R}^3$ dans E.
   Or $\mathcal{B}' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est l'image par f^{-1} d'une base de $\mathbb{R}^3$.
   Donc $\mathcal{B}'$ est une base de E.

   (b) Soit P un polynôme quelconque de E. Puisque $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$,

$$\begin{array}{rcl} P & = & \mathrm{id}_E(P) = (f^{-1}\circ f)(P) = f^{-1}\big(f(P)\big) \\ & = & f^{-1}\big(\,(P(1)\,,\,P(2)\,,\,P(3))\,\big) \text{ par définition de } f \\ & = & f^{-1}\left(P(1)\cdot e_1+P(2)\cdot e_2+P(3)\cdot e_3\right) \\ & = & P(1)\cdot f^{-1}(e_1)+P(2)\cdot f^{-1}(e_2)+P(3)\cdot f^{-1}(e_3) \text{ par linéarité de } f^{-1} \\ & = & P(1)\cdot Q_1+P(2)\cdot Q_2+P(3)\cdot Q_3 \end{array}$$

On en déduit que P a pour coordonnées $\begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(3) \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Soit M la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Alors M est inversible et son inverse M^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$
La $j-$ème colonne de M^{-1} est la matrice colonne des coordonnées du polynôme X^{j-1} dans la base (Q_1, Q_2, Q_3).
On obtient donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 \\ 3^0 & 3^1 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

4. (a) $f(Q_2) = e_2$ signifie que $\big(Q_2(1)\,,\, Q_2(2)\,,\, Q_3(3)\big) = (0, 1, 0)$

$$\text{c'est-à-dire que } \left\{ \begin{array}{l} Q_2(1) = 0 \\ Q_2(2) = 1 \\ Q_2(3) = 0 \end{array} \right.$$

Donc le polynôme $Q_2(X)$, qui est de degré au plus 2, admet pour racines 1 et 3. Par conséquent il existe un réel λ tel que $Q_2(X) = \lambda \cdot (X-1)(X-3)$.
Or $Q_2(2) = 1$. D'où $(2-1)(2-3)\lambda = 1$ puis $\lambda = -1$.
Donc $\boxed{Q_2(X) = -(X-1)(X-3) = -(X^2 - 3X - X + 3) = -3 + 4X - X^2}$

(b) La deuxième colonne de M est formée des coordonnées de $Q_2(X)$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E.
Donc $\quad M = \begin{pmatrix} \star & -3 & \star \\ \star & 4 & \star \\ \star & -1 & \star \end{pmatrix}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2 \sqrt{1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}}{x - 1}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Pour tout réel h voisin de 0,

$$g(h) = \frac{\sqrt{1 + \sin(h)}}{1 - h} = (1 + \sin(h))^{1/2} \times \frac{1}{1 - h}.$$

- Pour tout réel u au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} (1+u)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}u + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}u^2 + u^2\varepsilon_1(u) \\ &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\varepsilon_1(u) \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$.
Posons $u = \sin(h)$. Alors u est au voisinage de 0 car $\lim\limits_{h \to 0} \sin(h) = 0$.

- $u = \sin(h) = h + h^2\varepsilon_2(h)$ où $\lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0$
- $u^2 = \left(h + h^2\varepsilon_2(h)\right)^2 = h^2 + h^2\varepsilon_3(h)$ où $\lim_{h\to 0}\varepsilon_3(h) = 0$.

On en déduit que :

$$(1+\sin(h))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + h^2\varepsilon_4(h),$$

où $\lim_{h\to 0}\varepsilon_4(h) = 0$.

- On rappelle que $\dfrac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^2\varepsilon_5(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon_5(h) = 0$.
- Ainsi,

$$\begin{aligned}\boxed{g(h)} &= \left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + h^2\varepsilon_5(h)\right) \times \left(1 + h + h^2 + h^2\varepsilon_1(h)\right)\\ &= \left(1 + h + h^2\right) + \left(\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h^2\right) + \left(-\frac{1}{8}h^2\right) + h^2\varepsilon_6(h)\\ &\boxed{= 1 + \frac{3}{2}h + \frac{11}{8}h^2 + h^2\varepsilon_6(h)},\end{aligned}$$

où $\lim_{h\to 0}\varepsilon_6(h) = 0$.

2. Pour tout réel $h \in]0\,,\,1[$,

$$hf\left(\frac{1}{h}\right) = h\frac{\left(\frac{1}{h}\right)^2\sqrt{1+\sin(h)}}{\frac{1}{h}-1} = \frac{\sqrt{1+\sin(h)}}{1-h} = g(h).$$

Or, d'après la question précédente, pour tout h voisin de 0^+,

$$g(h) = 1 + \frac{3}{2}h + \frac{11}{8}h^2 + h^2\varepsilon_6(h).$$

En posant $x = \dfrac{1}{h}$, on obtient pour tout réel x voisin de $+\infty$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{11}{8}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\varepsilon_6\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= 1 + \frac{3}{2x} + \frac{11}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x),\end{aligned}$$

où $\varepsilon(x) = \varepsilon_6\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$.

En multipliant par x, on en déduit l'égalité :

$$\boxed{f(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{11}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x).}$$

3. D'après l'égalité précédente, pour tout réel x voisin de $+\infty$,

$$f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{11}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \underset{(x\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote Δ d'équation $\boxed{y = x + \dfrac{3}{2}}$.

4. Soit x au voisinage de $+\infty$. On a

$$f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{11}{8} + \varepsilon(x)\right).$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$, donc $\dfrac{11}{8} + \varepsilon(x) > 0$. D'autre part, $\dfrac{1}{x} > 0$. On en déduit que :

$$f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) > 0.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty, \text{ la courbe } \mathscr{C}_f \text{ est située au-dessus de } \Delta}$.

Exercice 3

On admet qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\star) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

1. D'après $(\star)$, $\varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0)$, c'est-à-dire $\varphi(0) = 2\varphi(0)$. D'où $\boxed{\varphi(0) = 0}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) D'après la propriété $(\star)$,

   $$\forall y \in [0, 1], \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

   Donc

   $$\begin{aligned}
   \int_0^1 \varphi(x + y) \,\mathrm{d}y &= \int_0^1 (\varphi(x) + \varphi(y)) \,\mathrm{d}y \\
   &= \int_0^1 \varphi(x) \,\mathrm{d}y + \int_0^1 \varphi(y) \,\mathrm{d}y \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
   &= \varphi(x) \int_0^1 1 \,\mathrm{d}y + \int_0^1 \varphi(y) \,\mathrm{d}y \\
   &= \varphi(x)(1 - 0) + \int_0^1 \varphi(y) \,\mathrm{d}y \\
   &= \varphi(x) + \int_0^1 \varphi(y) \,\mathrm{d}y.
   \end{aligned}$$

   D'où

   $$\boxed{\varphi(x) = \int_0^1 \varphi(x + y) \,\mathrm{d}y - \int_0^1 \varphi(y) \,\mathrm{d}y}.$$

   (b) Effectuons le changement de variable $\boxed{t = x + y}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x + y) \,\mathrm{d}y$.
   La fonction $y \longmapsto x + y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$. On a :
   - $\boxed{\mathrm{d}t = \mathrm{d}y}$.
   - Quand $y = 0$, $t = x$
   - Quand $y = 1$, $t = x + 1$

On obtient alors, par changement de variable :

$$\int_0^1 \varphi(x+y)\,\mathrm{d}y = \int_x^{x+1} \varphi(t)\ \mathrm{d}t.$$

En remplaçant dans l'égalité de la question précédente, on en déduit l'égalité :

$$\boxed{\varphi(x) = \int_x^{x+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi(y)\,\mathrm{d}y}.$$

3. La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit Φ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$. Alors, d'après la question précédente, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \Phi(x+1) - \Phi(x) - \int_0^1 \varphi(y)\ \mathrm{d}y.$$

$\boxed{\text{La fonction } \Phi \text{ étant dérivable sur } \mathbb{R}\text{, on en déduit que } \varphi \text{ l'est aussi}}$ (en tant que différence de fonctions dérivables) et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = 1 \times \Phi'(x+1) - \Phi'(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x).$$

Or, d'après $(\star)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x+1) = \varphi(x) + \varphi(1).$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \varphi(1)}.$$

4. D'après la question précédente, il existe une constante réelle c telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(1)\,x + c.$$

En particulier, on a $\varphi(0) = \varphi(1) \times 0 + c = c$. D'après la question 1, $\varphi(0) = 0$. D'où $c = 0$. Par conséquent, $\boxed{\varphi \text{ est une fonction linéaire}}$ puisque

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(1)\,x}.$$

Exercice 4

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} f(x,y) \text{ existe} &\iff x^2 + y^2 \in [-1, 1] \\ &\iff x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{aligned}$$

Le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f est donc le disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

2. On rappelle que la ligne de niveau t de f est définie par :

$$\mathscr{L}_t = \{(x, y) \in \mathscr{D},\ f(x, y) = t\}.$$

(a) Si $(x, y) \in \mathscr{D}$, alors $x^2 + y^2 \in [0, 1]$. Or :

$$\forall z \in [0, 1], \quad \arccos(z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

On en déduit que la fonction f est à valeurs dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, $\mathscr{L}_t$ est vide lorsque $t \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Soient $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $(x, y) \in \mathscr{D}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x,y) = t &\iff \arccos(x^2+y^2) = t \\ &\iff x^2 + y^2 = \cos(t) \qquad\qquad (\text{ et } \cos(t) \geqslant 0) \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{\cos(t)}$.

3. La figure correspondante est la (b).
4. (a) Pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}.$$

(b) D'après le cours, le plan tangent $\mathscr{P}$ a pour équation :

$$z = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{-2}{\sqrt{3}}.$$

De plus,

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Finalement, après simplification, l'équation du plan tangent est donnée par :

$$z = \frac{\pi + 2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,x - \frac{2}{\sqrt{3}}\,y.$$

(c) On rappelle qu'un point critique est un point où les deux dérivées partielles sont nulles. Or, pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff -2x = 0 \iff x = 0.$$

De même :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff -2y = 0 \iff y = 0.$$

On en déduit que l'unique point critique de f sur U est $(0, 0)$.

(d) On a :

$$f(0,0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Or, on a vu que :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}, \quad f(x,y) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, f admet un maximum global en $(0, 0)$.

5. D'après les calculs effectués à la deuxième question, l'aire $A(t)$ recherchée est celle d'un disque de rayon $\sqrt{\cos(t)}$. D'où :

$$A(t) = \pi\sqrt{\cos(t)}^2 = \pi\cos(t).$$

6. D'après l'indication donnée dans l'énoncé, le volume V recherché est :

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\pi\sin(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi\sin(0) = \pi.$$