Examen final

MT2A-MT2B-MT2D

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Exercice 1 : QCM (5 points)

Pour chacune des 5 questions suivantes, cocher la seule réponse exacte sans justification. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Chaque réponse fausse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.

1. On considère une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et admettant pour développement limité à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = \frac{3}{2} - 5x + \frac{1}{7}x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.

☐ Au voisinage à gauche de A, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T.
☐ Au voisinage de A, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T.
☐ Au voisinage à droite de A, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T.
☐ Au voisinage de A, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de T.
☐ On ne peut pas répondre sans information supplémentaire.

2. Le développement limité à l'ordre 3 au voisinage zéro de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ est donné par $f(x) = \dots$

☐ $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \quad$ où $\quad \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
☐ $\dfrac{1}{2} - x - x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad$ où $\quad \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
☐ $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \quad$ où $\quad \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
☐ $-2x + 2x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad$ où $\quad \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$
☐ $-1 + (1-x) - (1-x)^2 + (1-x)^3 + (1-x)^3\varepsilon(x) \quad$ où $\quad \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

3. Parmi les ensembles suivants lequel est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

   - ☐ $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor f(x) \rfloor = 0\}$ où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t
   - ☐ l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = x$
   - ☐ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle : $y' = 3\,y$
   - ☐ l'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$
   - ☐ l'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$

4. Parmi les familles ci-dessous, laquelle est une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

   - ☐ $\big(1 + X\ ,\ X + X^2\big)$
   - ☐ $\big(1 + X + X^2\ ,\ 1 + X^2\ ,\ X^2\big)$
   - ☐ $\big(2 + X\ ,\ -X^2\ ,\ 2 + X + 2X^2\big)$
   - ☐ $\big(1 + X\ ,\ 3X - X^2\ ,\ 5X\ ,\ X^2 - 2\big)$
   - ☐ $\big(1 + X + X^2\big)$

5. Parmi ces matrices, laquelle est celle d'un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ relativement à la base canonique ?

   - ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
   - ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : algèbre linéaire (7 points)

Pour tout entier naturel n, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

1. Soit $L : E \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$ l'application définie par :

$$\forall\, P \in E, \quad L\big(P\big) = \left(\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right) X$$

En particulier $L(1) = \left(\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t\right) X = 2X$.

   (a) Calculer $L(X)$, $L(X^2)$ et $L(X^3)$.

   (b) Montrer que L est une application linéaire.

   (c) En déduire que l'ensemble $F = \left\{P \in E \mid \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. On considère à présent l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P' + L(P) \end{array}$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P. On note $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice A de f relativement aux bases canoniques $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

3. (a) Donner le rang de f. f est-elle surjective ?

   (b) En déduire la dimension du noyau de f.

   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

4. On considère la restriction φ de f à F.

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & F & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P' + \left(\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right) X \end{array}$$

   (a) Simplifier l'expression de $\varphi(P)$ pour tout polynôme $P \in F$.

   (b) Prouver que φ est injective.

Exercice 3 : analyse (9 points)

Partie A (5 points)

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.
On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ et en particulier $a_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\forall\, t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^n \, \mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n$.
   (b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. (a) Calculer a_0.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que

$$a_{n+1} = -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)\, a_n$$

   (c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n et de a_{n+1} .
   (d) Proposer un équivalent simple de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B (4 points)

Dans cette partie, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \int_0^1 (t^2 + x\, t + y)^2 \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

1. (a) Pour tous réels α, β et γ, développer le carré : $(\alpha + \beta + \gamma)^2$.
   (b) Prouver que, pour tous réels x et y,

$$f(x,y) = a_2\, x^2 + a_0\, y^2 + 2a_1\, x\, y + 2a_3\, x + 2a_2\, y + a_4$$

   On ne remplacera pas a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 par leurs valeurs.
2. *On admet, pour les deux dernières questions, que* $a_0\, a_2 - a_1^2 > 0$ et que $a_2 > 0$.

   Démontrer que f admet un unique point critique b sur $\mathbb{R}^2$.
   On exprimera ce point critique en fonction de a_0, a_1, a_2 et a_3.
3. Montrer que f présente un extremum local en b.
   Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

Exercice 1

1. On considère une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et admettant pour développement limité à l'ordre 3 en 0 :

$$f(x) = \frac{3}{2} - 5x + \frac{1}{7}x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.

☐ Au voisinage à gauche de A, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de T.

2. Le développement limité à l'ordre 3 au voisinage zéro de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ est donné par $f(x) = \dots$

☐ $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

3. Parmi les ensembles suivants lequel est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

☐ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle : $y' = 3\,y$

4. Parmi les familles ci-dessous, laquelle est une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

☐ $\left(1 + X + X^2\ ,\ 1 + X^2\ ,\ X^2\right)$

5. Parmi ces matrices, laquelle est celle d'un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ relativement à la base canonique ?

☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1. (a) On a :

$$L(X) = \left(\int_{-1}^{1} t \,\mathrm{d}t\right) X = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} X = 0$$
$$L(X^2) = \left(\int_{-1}^{1} t^2 \,\mathrm{d}t\right) X = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} X = \frac{2}{3}X$$
$$L(X^3) = \left(\int_{-1}^{1} t^3 \,\mathrm{d}t\right) X = \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} X = 0$$

(b) Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times E \times E$, alors :

$$\begin{aligned} L(\lambda P + Q) &= \left(\int_{-1}^{1} (\lambda P + Q)(t)\,\mathrm{d}t \right) X \\ &= \left(\int_{-1}^{1} (\lambda P(t) + Q(t))\,\mathrm{d}t \right) X \\ &= \left(\lambda \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t \right) X \\ &= \lambda \left(\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t \right) X + \left(\int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t \right) X \\ &= \lambda L(P) + L(Q) \end{aligned}$$

Ainsi, L est bien une application linéaire.

(c) Soit $P \in E$. On remarque que :

$$P \in \mathrm{Ker}(L) \iff L(P) = 0 \iff \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi, l'ensemble F de l'énoncé correspond au noyau de L qui est un sous-espace vectoriel de E d'après le cours.

2. La matrice A de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est donnée par :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

3. (a) On détermine le rang de A en l'échelonnant :

$$\mathrm{rg}(A) \underset{C_1 \leftarrow C_1 - \frac{3}{4} C_3}{=} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On déduit de la forme échelonnée que A (et donc f) est de rang 3. Ainsi, f est surjective car :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]).$$

(b) D'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1.

(c) On remarque que deux colonnes sont proportionnelles dans la matrice A. Ainsi :

$$f(1) = \frac{3}{4} f(X^2)$$

Par linéarité de f, on en déduit que :

$$f\left(1 - \frac{3}{4} X^2\right) = 0.$$

Autrement dit, $1 - \dfrac{3}{4} X^2$ est un élément du noyau de f. Or, le noyau étant de dimension 1, cela implique que la famille $\mathscr{D} = \left(1 - \dfrac{3}{4} X^2\right)$ est une base du noyau de f.

4. (a) On sait que les polynômes P de F satisfont :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi, pour tout $P \in F$:

$$\varphi(P) = P' + \left(\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right) X = P'$$

(b) Comme φ est une application linéaire, pour démontrer qu'elle est injective il suffit de démontrer que son noyau est réduit au polynôme nul. Soit alors $P \in F$:

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0 \\ &\iff P' = 0 \text{ et } P \in F \\ &\iff P \in F \text{ et } \exists C \in \mathbb{R},\ P(X) = C \ (\star). \end{aligned}$$

Or si P vérifie $(\star)$, on a :

$$P \in F \iff \int_{-1}^{1} C\,\mathrm{d}t = 0 \iff [Ct]_{-1}^{1} = 0 \iff C = 0.$$

Ainsi,

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}.$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$. D'où le résultat.

Exercice 3

Partie A

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.
On pose $a_n = \int_0^1 t^n \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ et en particulier $a_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} t \in [0,1] &\implies -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ &\implies \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{0} \quad \text{par croissance de la fonction exp} \\ &\implies 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant 1. \end{aligned}$$

Sachant que $t^n \geqslant 0$ pour $t \in [0,1]$, on en déduit :

$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^n \, \mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En intégrant sur $[0,1]$ l'encadrement de la question précédente, on obtient :

$$\int_0^1 0 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t$$

i.e.

$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t$$

où $\int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Sachant que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que la suite $\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout t dans $[0,1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$. Donc : $\forall t \in [0,1],\ t^{n+1} \, \mathrm{e}^{-t} \leqslant t^n \, \mathrm{e}^{-t}$.
En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 t^{n+1} \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leqslant a_n.$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

3. (a) $a_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} + 1 = \boxed{1 - \mathrm{e}^{-1}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que a_{n+1} peut s'écrire :

$$a_{n+1} = \int_0^1 u'(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t,$$

où u et v sont les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telles que :

$$\forall t \in [0,1], \quad \begin{cases} u(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v(t) = t^{n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = (n+1)t^n. \end{cases}$$

Donc en intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \boxed{a_{n+1}} &= [u(t)\, v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \left[\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) t^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)(n+1)t^n\, \mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + 0 - \int_0^1 \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)(n+1)t^n\, \mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + (n+1) \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \\ &\boxed{= -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)\, a_n}. \end{aligned}$$

(c) On en déduit que $(n+1)\, a_n = a_{n+1} + \mathrm{e}^{-1}$ et donc que :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n+1}\left(a_{n+1} + \mathrm{e}^{-1}\right)}.$$

(d) D'après la question 1(b), on sait que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(a_{n+1} + \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}$. Et puisque $\mathrm{e}^{-1} \neq 0$, on en déduit :

$$\left(a_{n+1} + \mathrm{e}^{-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}.$$

D'après la question précédente,

$$\boxed{a_n} = \frac{1}{n+1}\left(a_{n+1} + \mathrm{e}^{-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}\, \mathrm{e}^{-1} \boxed{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}}.$$

Notons qu'on aurait pu démontrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$ en vérifiant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}} = 1$. En effet, pour tout entier n non nul, on a :

$$\frac{a_n}{\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}} = \frac{n}{\mathrm{e}^{-1}}\, a_n = \frac{n}{\mathrm{e}^{-1}}\, \frac{1}{n+1}\left(a_{n+1} + \mathrm{e}^{-1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{a_{n+1}}{\mathrm{e}^{-1}} + 1\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\left(\frac{a_{n+1}}{\mathrm{e}^{-1}} + 1\right),$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}} = 1$ i.e. $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$.

Partie B

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 (t^2 + x\,t + y)^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. (a) Soient α, β et γ trois nombres réels.

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)^2 &= [\alpha+(\beta+\gamma)]^2 = \alpha^2 + 2\,\alpha(\beta+\gamma) + (\beta+\gamma)^2 \\ &= \alpha^2 + 2\,\alpha\,\beta + 2\,\alpha\,\gamma + \beta^2 + 2\,\beta\,\gamma + \gamma^2\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\,\alpha\,\beta+2\,\alpha\,\gamma+2\,\beta\,\gamma}.$$

(b) Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^1 (t^2+x\,t+y)^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left((t^2)^2+(x\,t)^2+y^2+2\,t^2\,x\,t+2\,t^2\,y+2\,x\,t\,y\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(t^4+x^2\,t^2+y^2+2x\,t^3+2y\,t^2+2xy\,t\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(t^4\mathrm{e}^{-t}+x^2\,t^2\mathrm{e}^{-t}+y^2\mathrm{e}^{-t}+2x\,t^3\mathrm{e}^{-t}+2y\,t^2\mathrm{e}^{-t}+2xy\,t\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^1 t^4\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + x^2\int_0^1 t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + y^2\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + 2x\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + 2y\int_0^1 t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &\quad + 2xy\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= a_4 + x^2\,a_2 + y^2\,a_0 + 2x\,a_3 + 2y\,a_2 + 2xy\,a_1 \\ &= \boxed{a_2\,x^2 + a_0\,y^2 + 2a_1\,x\,y + 2a_3\,x + 2a_2\,y + a_4} \end{aligned}$$

2. En tant que fonction polynomiale, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, \left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2a_2\,x + 2a_1\,y + 2\,a_3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2a_0\,y + 2a_1\,x + 2\,a_2 \end{aligned}\right.$$

Les éventuels points critiques de f sont les couples solutions du système (on utilisera le fait que $a_0 \neq 0$ et que $a_0a_2 - a_1^2 \neq 0$) :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} 2a_2\,x + 2a_1\,y + 2\,a_3 = 0 \\ 2a_0\,y + 2a_1\,x + 2\,a_2 = 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} a_2\,x + a_1\,y = -a_3 \\ \boxed{a_1\,x + a_0\,\boldsymbol{y} = -a_2} \end{aligned}\right. \text{ avec } a_0 \neq 0$$

$$\overset{L_1 \longleftarrow a_0 L_1 - a_1 L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} a_0 a_2\, x - a_1^2\, x & = & -a_0 a_3 + a_1 a_2 \\ a_1\, x + a_0\, y & = & -a_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a_0 a_2 - a_1^2) x = a_1 a_2 - a_0 a_3 \\ a_0\, y = -a_2 - a_1\, x \end{array} \right.$$

$$\underset{\text{car } a_0 a_2 - a_1^2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \\ a_0\, y = -a_2 - a_1 \left(\dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \right) \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \\ a_0\, y = \dfrac{-a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2 - a_1^2 a_2 + a_0 a_1 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \\ a_0\, y = \dfrac{-a_0 a_2^2 + a_0 a_1 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \\ a_0\, y = \dfrac{a_0 (a_1 a_3 - a_2^2)}{a_0 a_2 - a_1^2} \end{array} \right. \underset{\text{car } a_0 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \\ \\ y = \dfrac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_0 a_2 - a_1^2} \end{array} \right.$$

On conclut que f admet un unique point critique :

$$\boxed{b = \left(\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_0 a_2 - a_1^2} \; , \; \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_0 a_2 - a_1^2} \right)}$$

3. Nous allons utiliser la condition suffisante du second ordre pour déterminer l'extremum de f.
   - *Calcul des dérivées partielles secondes.*

   La fonction f étant polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & = & 2a_2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y) & = & 2a_1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) & = & 2a_0 \end{array} \right.$$

   - *Utilisation des notations de Monge au point b :*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(b) = 2a_2 \quad , \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(b) = 2a_1 \quad , \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(b) = 2a_0$$

   La matrice hessienne de f en b est : $H(f)_b = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_2 & 2a_1 \\ 2a_1 & 2a_0 \end{pmatrix}$.

   Son déterminant est $rt - s^2 = 4(a_0 a_2 - a_1^2)$.

   Or on a admis précédemment que $a_0 a_2 - a_1^2 > 0$ et que $a_2 > 0$.

   Donc $rt - s^2 > 0$ avec $r > 0$.

   Ainsi f admet un **minimum local** en b.

   Remarque : on pourrait démontrer que ce minimum est absolu. Mais les calculs seraient longs et techniques avec la méthode proposée par l'exercice.