le 13 Juin 2022

UTBM MT2C

Examen printemps 2022

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *6 points*

1) Donner une méthode qui permet d'obtenir le développement limité de $\ln(1+t)$ *en* 0 *à l'ordre 3.*

2) Calculer $L_1 = \lim_{x\to 0}(\frac{\sin(x)}{x})^{\frac{1}{x^2}}$,

3) Calculer $L_2 = \lim_{x\to +\infty}(x - x^2.\ln(1+\frac{1}{x}))$.

Exercice 2 - *6 points*

1. *Trouver les limites, quand elles existent, des fonctions suivantes :*

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \text{ en } (x,y) = (0,0), \qquad g(x,y) = \frac{2x^3+2y^3+x^3y^3}{x^2+y^2} \text{ en } (x,y) = (0,0).$$

2. *On considère l'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) *Calculer les dérivées partielles de* f *sur* $\mathbb{R}^2$.

   (b) *Les dérivées partielles de* f *sont-elles continues sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

   (c) *Calculer les dérivées partielles secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ *si elles existent.*

   (d) *L'application* f *est-elle de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *? ("de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$*" signifie "admet des dérivées partielles secondes continues sur* $\mathbb{R}^2$*").*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *8 points*

Soit l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

$$E = \{a + b.X + c.X^2 + d.X^3, a, b, c, d \in \mathbb{R}/b - c = 0\} \subset \mathbb{R}_3[X].$$

et l'endomorphisme de E

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & Q(X) & \mapsto & (X^2+1).Q''(X) + (2X+2).Q'(X) \end{array}$$

.

PARTIE I :

1) Quelles sont les images des 3 vecteurs de la base $B = \{1, X + X^2, X^3\}$ de E par f ?

2) Quelles sont les composantes dans B des 3 images trouvées à la question précédente ?

3) En déduire la matrice $A = M_{f,B}$ de f dans la base B.

PARTIE II :

1) Déterminer la matrice la matrice $D = M_{f,C}$ de f dans la base

$$C = \{1, 2 + 3X + 3X^2, 1 + 3X + 3X^2 + 3X^3\}.$$

2) Déterminer P, la matrice de passage telle que $A = P.D.P^{-1}$?

2) Exprimer A^2 en fonction de P et D. Puis A^3. Généraliser à A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

PARTIE III :

1) Quelles sont les composantes de $Q(X) = 1 + X + X^2 + X^3$ dans C.

2) Déduire de ce qui précède $f^n(1+X+X^2+X^3)$ (où f^n désigne la composée $f \circ f \circ f \circ ... \circ f$ n fois).