le 22 Juin 2023

UTBM MT2C

Examen printemps 2023

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *2 points*

Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(5.(x+1)^2) \end{array}$$

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f en 0. Justifier soigneusement.

2) Quelle est la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0 ? Justifier soigneusement.

Exercice 2 - *3 points*

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. *Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1,2]$, on a : $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.*
2. *Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$.*
3. *Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *6 points*

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Justifier soigneusement.

2) Quelles sont ses dérivées partielles pour $(x,y) \neq (0,0)$? Justifier soigneusement.

3) Quelles sont ses dérivées partielles pour $(x,y) = (0,0)$? Justifier soigneusement.

4) Les dérivées partielles ci-dessus sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$? Justifier soigneusement.

Exercice 4 - *9 points*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f((x,y,z)) = (2x-3y, -y, 3x-3y-z)$.

1) Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

2) Déterminer une base de $Ker(f-2id)$. Justifier soigneusement.

3) Déterminer une base de $Ker(f+id)$. Justifier soigneusement.

4) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,0,1)(1,1,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Justifier soigneusement.

5) Déterminer la matrice de passage $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la matrice D de l'application f dans $\mathcal{B}$ telles que $A = P.D.P^{-1}$. Justifier soigneusement.

6) Calculer P^{-1}. Justifier soigneusement.

7) Déterminer A^2 et A^3 en fonction de P et D. En déduire A^n en fonction de P, D et $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier soigneusement.

8) Calculer D^n et en déduire A^n ($n \in \mathbb{N}$) en fonction de n. Justifier soigneusement.

9) Déduire de ce qui précède $f^8((1,2,3))$ où f^k désigne la composée $f \circ f \circ ... \circ f$ (k fois). Justifier soigneusement.