Examen printemps 2024

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *5 points*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. *Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en zéro.*
2. *En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.*
3. *Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.*

Justifier soigneusement.

Exercice 2 - *4 points*

1. *Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$.*
   On cherchera une expression du type $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{d\theta}{\cos\theta}$, en effectuant le changement de variables $x = \sin\theta$.*

Justifier soigneusement.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *6 points*

1. *Soit la fonction f définie par :*

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^2.y+x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) *f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Justifier soigneusement.*

   (b) *Quelles sont ses dérivées partielles de f ? Sont-elles continues ?. Justifier soigneusement.*

2. *Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$.*

   (a) *Quel est l'ensemble de définition de g ? Déterminer les points critiques de g. Justifier soigneusement.*

   (b) *Ces points critiques sont-ils maximum, minimum ou point selle ? Justifier soigneusement.*

Exercice 4 - *5 points*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f((x,y,z)) = (x+y, 2y, -2x+2y+3z)$.

1. *Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$*
2. *Déterminer une base de $Ker(f - id)$. Justifier soigneusement.*
3. *Déterminer une base de $Ker(f - 2id)$. Justifier soigneusement.*
4. *Déterminer une base de $Ker(f - 3id)$. Justifier soigneusement.*
5. *Montrer que la famille $\mathcal{B}$ constituée des vecteurs trouvés ci-dessus est une base de $\mathbb{R}^3$. Justifier soigneusement.*
6. *Déterminer la matrice de passage $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la matrice D de l'application f dans $\mathcal{B}$ telles que $A = P.D.P^{-1}$. Justifier soigneusement.*
7. *En déduire A^5. Justifier soigneusement.*