le 17 Juin 2025

UTBM MT2C

Examen printemps 2025

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *3 points*

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$$

grâce au changement de variable $u = e^x$.

Exercice 2 - *3 points*

1) Donner une méthode qui permet d'obtenir le développement limité de $\frac{1}{1+t}$ *en* 0 *à l'ordre 3.*

2) En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \frac{1}{2+2.x+2.x^2-x^3}$.

3) Quelle est la tangente de f *en 0 et la position de la courbe de* f *par rapport à cette tangente ?*

Justifier soigneusement.

Exercice 3 - *2 points*

Déterminer, si elle existe, la limite de la fonction suivante en $(0, 0)$ *:*

$$g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Justifier soigneusement.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 4 - *4 points*

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1 - f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

2 - Quelles sont ses dérivées partielles ?

3 - Les dérivées partielles sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

4 - Calculer, si elles existent, les dérivées partielles secondes $\boldsymbol{\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(0,0)}$ et $\boldsymbol{\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(0,0)}$. Que peut-on en déduire ?

Justifier soigneusement.

Exercice 5 - *8 points*

Soit C, la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-x+y, -y+z, y-z).$$

1) Quel est le noyau de f ? Quelle est sa dimension ?

2) Quel est l'image de f ? Quelle est sa dimension ?

3) Quelle est la matrice de f dans la base canonique C de $\mathbb{R}^3$? On note $A := M_{f,C}$.

4) Quelle est la matrice de f dans la base $B = \{(1,0,0), (1,1,1), (1,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$? On note $D := M_{f,B}$

5) Quelle est la matrice de passage P telle que $A = P.D.P^{-1}$. Calculer P^{-1}.

6) Déterminer A^2 et A^3 en fonction de P et D. En déduire A^n en fonction de P, D et $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier soigneusement.

7) Calculer D^n et en déduire A^n ($n \in \mathbb{N}$) en fonction de n.

8) Déduire de ce qui précède $f^8((1,0,1))$ où f^k désigne la composée $f \circ f \circ ... \circ f$ (k fois).

Justifier soigneusement.