

Examen printemps 2026

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 5 points

1) *Rappeler le développement limité de $\ln(1+t)$ en 0 à l'ordre n . Donner une méthode qui permet de démontrer ce résultat (on ne fera pas la démonstration).*

2) *Calculer $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$,*

3) *Calculer $L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$.*

Exercice 2 - 4 points

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(x, y) = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1) *f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?*

2) *Quelles sont ses dérivées partielles d'ordre 1 pour $(x, y) \neq (0, 0)$?*

3) *Quelles sont ses dérivées partielles d'ordre 1 pour $(x, y) = (0, 0)$?*

4) *Les dérivées partielles ci-dessus sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - 5 points

Soit n un entier supérieur à 1, et $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$.

1. Calculer I_1 .
2. Montrer que $(I_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. En déduire que $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
3. Soit $u_n: x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

(a) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer la dérivée u'_n , et montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad u'_n(x) = \frac{1-2n}{(1+x^2)^n} + \frac{2n}{(1+x^2)^{n+1}}$$

(b) En déduire que $\forall n \geq 1, \quad 2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n}$.

(c) En déduire I_2 .

Exercice 4 - 6 points

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ définie par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On appelle trace l'application

$$\text{Tr}: \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \text{Tr}(M) = a + d \end{cases}$$

1. Montrer que l'application Tr est linéaire.
2. On définit l'application $\varphi: M \mapsto \varphi(M) = \text{Tr}(M) \cdot I_2 - M$ où I_2 est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (b) Vérifier que $\varphi(I_2) = I_2$.
 - (c) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\text{Tr}(\varphi(M)) = \text{Tr}(M)$.
3. (a) Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$.
 - (b) Calculer A^2 , en déduire que A est inversible, et donner son inverse A^{-1} .