Final MT2E, Printemps 2022

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Algèbre

Exercice 1 : Applications linéaires (10 points)

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B (et on rappelle que la transposition est une application linéaire).
On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsque ${}^tM = -M$.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Donner un exemple d'une matrice antisymétrique.

2. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On considère une matrice A fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et f l'application définie sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par

$$f\colon M \mapsto ({}^tA)M + MA$$

- **a.** Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que $f(M)$ est encore une matrice antisymétrique.
- **b.** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

4. Dans la suite de l'exercice, on étudie le cas $n = 3$, et on pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad .K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **a.** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est libre.
- **b.** Montrer que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

5.
- **a.** Calculer $f(J)$, $f(K)$, et $f(L)$. Exprimer les résultats comme combinaison linéaire de J et L uniquement.
  Les calculs devront figurer sur la copie.
- **b.** En déduire une base de $\mathrm{Im} f$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
- **c.** Calculer la dimension de $\ker f$, puis en donner une base.

6.
- **a.** Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- **b.** On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Calculer le rang de $f + \mathrm{Id}$.
- **c.** En déduire $\dim \ker(f + \mathrm{Id})$.

Analyse

Exercice 2 : Intégrales (6 points)

On convient que pour tout nombre réel x, $x^0 = 1$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x, \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0, et I_1.

a. Pour tout entier n, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.

b. En déduire I_2.

2. **a.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b. En déduire (I_n) est convergente, et donner sa limite.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

4. **a.** Calculer J_0, puis exprimer pour tout entier n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.

b. En déduire J_1.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

Exercice 3 : Pathologique mais presque (4 points)

1. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 0\}$. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit f la fonction définie par

$$f(x_y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) & \text{si } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

.

a. Montrer que f est continue sur Ω.

b. Montrer que f est continue en $(0,0)$.

c. Montrer que f n'est pas continue au point $(a,0)$ (où $a \neq 0$).