Final MT2E, Printemps 2023

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Algèbre

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Soit E un espace vectoriel réel.

1. Donner la définition d'une famille finie libre de vecteurs de E.

2. Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs de E.

3. Montrer que si la famille de vecteurs (a, b, c, d) est libre, alors (a, b, c) est encore libre.

Exercice 2 : Applications linéaires (7 points)

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y + 2z, -2x + y - 3z, -x + y - 2z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Donner la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Soit $u = (1, 1, 0)$. Calculer $f(u)$, $f^2(u)$, $f^3(u)$ (rappel : $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$).

4. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.

6. On appelle A' la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$. Donner une relation entre A, A', P, et P^{-1}.

7. Calculer A'.

8. Déterminer le rang de f, et en déduire la dimension du noyau de f.

9. Donner une base de $\ker f$, et de $\mathrm{Im}\, f$.

10. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$?

Analyse

Exercice 3 : Intégrales et DL (7 points)

Dans ce problème, on note $\cosh\colon x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh\colon x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, et $\tanh\colon x \mapsto \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.

1. Déterminer le développement limité de la fonction tanh en 0 à l'ordre 4.
Pour la suite de l'exercice, on pourra prendre $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de tanh, et donner la position relative de la courbe et de sa tangente.

3. À l'aide du changement de variable $t = \cosh x$, calculer $F(u) = \displaystyle\int_0^u \tanh x \, dx$, et montrer que $F(u) = \ln\big(\cosh(u)\big)$.

4. Calculer le développement limité de F en 0 à l'ordre 5.

5. On admet que tanh est bijective, et on note $\operatorname{argtanh}\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ sa réciproque. On admet aussi que argtanh admet un développement limité de la forme

$$\operatorname{argtanh}(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + o(h^4)$$

où les coefficients a_i sont des réels.

a. Pour tout $x \in]-1,1[$, déterminer $\operatorname{argtanh} \circ \tanh(x)$.

b. En déduire le développement limité de argtanh en 0 à l'ordre 4.

Exercice 4 : Fonction de 2 variables (3 points)

Étudier les extrema locaux de la fonction $f\colon (x,y) \mapsto 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.