Final MT2E, Printemps 2024

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Algèbre

Exercice 1 : Applications linéaires (11 points)

On considère les matrices $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$ un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie A : étude de A et F

1. Calculer A^2, et en déduire que A est inversible. Donner l'inverse de A.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. **a.** Résoudre l'équation $AM = MA$ d'inconnue $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que (I_2, A) est une base de F.

4. Soient M et N deux matrices quelconques de F.

a. Montrer que le produit $M \times N$ est dans F.

b. Montrer que M et N commutent ($MN = NM$).

5. Soit M une matrice non nulle de F. Montrer que M est inversible, et que $M^{-1} \in F$.

Partie B : un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = AMA$.
On note (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7. Calculer $\varphi \circ \varphi$, en déduire que φ est bijectif, et donner φ^{-1}.

8. **a.** Calculer $\varphi(E_1), \cdots, \varphi(E_4)$, et donner la matrice de φ dans la base canonique.

b. Donner une base de $E_1 = \ker(\varphi - \mathrm{Id})$, et de $E_{-1} = \ker(\varphi + \mathrm{Id})$.

Analyse

Exercice 2 : Intégrales (7 points)

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. **a.** Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{a}{2-x} + \dfrac{b}{2+x}$.

b. En déduire la valeur de u_0.

2. Calculer u_1.

3. Pour tout entier naturel n, calculer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n.

4. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

b. Montrer par encadrement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

c. En déduire un équivalent simple de u_n.

Exercice 3 : Fonctions de deux variables (4 points)

Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}\right.$

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 en $(0,0)$.

4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?