Final MT2E, Printemps 2025

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.
Les documents, calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Algèbre

Exercice 1 : Applications linéaires (10 points)

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère alors $f\colon X \mapsto JX$, $g\colon X \mapsto KX$, $\mathrm{Id}\colon X \mapsto X$ les applications définies sur $\mathbb{R}^3$, et $E = \mathrm{Vect}(I, J, K)$.

Partie A : étude de f

1. Montrer que (I, J, K) est une base de E, en déduire la dimension de E.

2. Calculer J^3, et exprimer le résultat en fonction de J.

3. On pose $u = (\sqrt{2}, 1, 1)$, et $v = (0, 1, -1)$.

- **a.** Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
- **b.** Calculer $\ker(f + \sqrt{2}\mathrm{Id})$, et déterminer un vecteur non nul w appartenant à ce noyau.

4.
- **a.** Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
- **b.** Calculer $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, et en déduire une matrice inversible P telle que $J = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer P^{-1}).
- **c.** Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$.

Partie B : questions de cours

5. Montrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

6. Soient E un espace vectoriel réel, $x \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lambda \cdot x = 0_e \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$$

7. Soit f une application linéaire, montrer que f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$

Analyse

Exercice 2 : Intégrales (7 points)

Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

3. En déduire les valeurs de I_1, I_2, et I_3.

4. Montrer que (I_n) est décroissante.

5. Montrer que (I_n) est convergente, et que sa limite est 0.

6. Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1,\ (-1)^n I_n = \ln 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

7. En déduire que la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente, et donner sa limite.

8. En utilisant 2. et 4., montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n},$$

et en déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : Fonctions de deux variables (4 points)

Soit $f: \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \exp\left(\frac{1}{3}x^3 - x - y^2\right) \end{array}\right.$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer les points critiques de f.

3. Calculer la matrice Hessienne de f aux points $(-1,0)$, et $(1,0)$.

4. f admet-elle des extrema locaux (si oui, préciser leur nature) ?