

Final MT2E, Printemps 2026

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.

Les calculatrices, téléphones portables, et les montres connectées sont interdits.

Une feuille de notes manuscrites, format A4 recto/verso est autorisée pour cette épreuve.

Exercice 1 : Développements limités

1. Donner une méthode qui permet d'obtenir le développement limité de $\ln(1+t)$ en 0 à l'ordre 3.

2. Calculer $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{1/x^2}$

3. Calculer $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$

Exercice 2 : Fonctions de deux variables

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Les dérivées partielles de f sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

3. Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ si elles existent.

4. L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 : Intégrales

(5 points)

Soit n un entier supérieur à 1, et $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$.

1. Calculer I_1 .
2. Montrer que (I_n) est décroissante. En déduire que (I_n) est convergente.
3. Soit $u_n: x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

a. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer la dérivée u'_n , et montrer que

$$\forall x \in [0, 1], u'_n(x) = \frac{1-2n}{(1+x^2)^n} + \frac{2n}{(1+x^2)^{n+1}}$$

b. En déduire que $\forall n \geq 1, 2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n}$.

c. En déduire I_2 .

Exercice 4 : Algèbre linéaire

(6 points)

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ définie par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On appelle trace l'application

$$\text{Tr}: \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto \text{Tr}(M) = a + d \end{cases}$$

1. Montrer que l'application Tr est linéaire.
2. On définit l'application $\varphi: M \mapsto \varphi(M) = \text{Tr}(M)I - M$ où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - b. Vérifier que $\varphi(I) = I$.
 - c. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\text{Tr}(\varphi(M)) = \text{Tr}(M)$.
3.
 - a. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$.
 - b. Calculer A^2 , en déduire que A est inversible, et donner son inverse A^{-1} .
 - c. Montrer que φ est un automorphisme, et donner l'expression de sa réciproque φ^{-1} .