Automne 2005
Mercredi 18 janvier 2006

Final de l'UV MT31

Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1
Soit le domaine D_1 défini par :

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \quad |x| + |y| \leqslant 2\right\}$$

1. Représenter graphiquement le domaine D_1. Quelle est la valeur de son aire ?
2. Retrouver, en utilisant la définition, $\mathcal{A}_1$ l'aire de D_1.
3. Evaluer l'intégrale $\mathcal{I}$ définie par :
$$\mathcal{I} = \iint_{D_1} e^{\frac{1}{2}(x+y)} \, dx \, dy$$

Exercice 2
Soit le domaine D_2 défini par :

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ |y| \leqslant x, \text{ et } x \geqslant 0\right\}$$

1. Représenter graphiquement le domaine D_2. Quelle est la valeur de son aire ?
2. Retrouver, en utilisant la définition, $\mathcal{A}_2$ l'aire de D_2.
3. Déterminer les coordonnées de son centre de gravité.

Exercice 3
Soit la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Partie A

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. La matrice A est diagonalisable. Pourquoi ?
3. Déterminer les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre.
4. En déduire les vecteurs propres associés à chaque valeur propre.
5. En déduire la matrice D diagonale et la matrice Q inversible telles que : $\mathrm{A} = \mathrm{Q}\,\mathrm{D}\,\mathrm{Q}^{-1}$
Remarque : on rangera les valeurs propres dans l'ordre décroissant pour obtenir

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Partie B

On se propose de résoudre le système différentiel suivant :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1(t)-4x_1(t)-6x_2(t)=8t+1\\ \dot{x}_2(t)+3x_1(t)+5x_2(t)=t\\ \dot{x}_3(t)+3x_1(t)+6x_2(t)+5x_3(t)=6\end{array}\right.$$

avec les condtions initiales suivantes :

$$(\mathrm{CI}_x)\left\{\begin{array}{l}x_1(0)=0\\ x_2(0)=0\\ x_3(0)=0\end{array}\right.$$

1. Vérifier que le système (S) est équivalent à :

$$\dot{X}(t)+\mathrm{A}\ X(t)=\Phi(t),$$

   où

$$\dot{X}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix}\quad X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \Phi(t)=\begin{pmatrix}8t+1\\ t\\ 6\end{pmatrix}$$

2. Montrer que le système (S) est équivalent à :

$$\dot{Y}(t)+\mathrm{D}\ Y(t)=\Psi(t),$$

   où

$$Y(t)=\mathrm{Q}^{-1}X(t)\quad \text{et}\quad \Psi(t)=\mathrm{Q}^{-1}\Phi(t)$$

   avec les condtions initiales suivantes :

$$(\mathrm{CI}_y)\left\{\begin{array}{l}y_1(0)=0\\ y_2(0)=0\\ y_3(0)=0\end{array}\right.$$

3. En déduire qu'il faut finalement résoudre les trois équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t)+5y_1(t)&=10t+7 &(1)\\ \dot{y}_2(t)+2y_2(t)&=-10t-1 &(2)\\ \dot{y}_3(t)-y_3(t)&=-9t-1 &(3)\end{aligned}$$

   avec les conditions initiales (CI_y).
4. On se propose maintenant de résoudre les équations (1), (2), (3).
   (a) Pour chacune des équations (1), (2), (3), résoudre les équations homogènes associées.
   (b) Pour chacune des équations (1), (2), (3), chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré judicieusement choisi.
   (c) En déduire les solutions y_1, y_2, y_3 de chacune des équations (1), (2), (3).
   (d) Donner Y.
5. Donner X la solution du système (S).

Automne 2005
Mercredi 18 janvier 2006

Correction du final de l'UV MT31

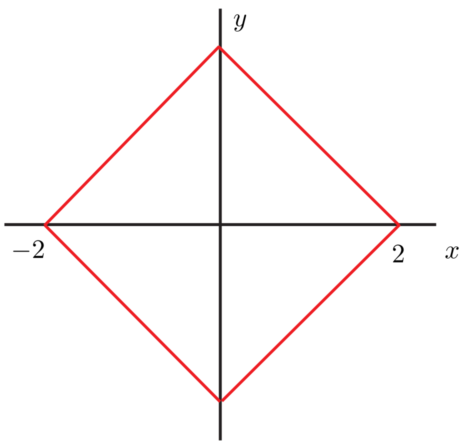
Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

Correction 1

1. Représentation graphique de D. On a la situation suivante :
   - $x > 0$ et $y > 0$, $x + y \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad y \leqslant 2 - x$
   - $x > 0$ et $y < 0$, $x - y \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 \leqslant y$
   - $x < 0$ et $y > 0$, $-x + y \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad y \leqslant 2 + x$
   - $x < 0$ et $y < 0$, $-x - y \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad -x - 2 \leqslant y$

   On en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 \leqslant x \leqslant 2 & \Rightarrow & x - 2 \leqslant y \leqslant 2 - x \\ -2 \leqslant x \leqslant 0 & \Rightarrow & -x - 2 \leqslant y \leqslant 2 + x \end{array}}$$



Tab. 1 – Représentation graphique de D

   On constate graphiquement que $\mathcal{A}(D) = 8$.

2. Nous avons par définition :

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dx\ dy$$

   En utilisant la question précédente, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D) &= \iint_D dx\ dy \\
&= \int_{-2}^{0} \left(\int_{-x-2}^{2+x} dy \right)\ dx + \int_{0}^{2} \left(\int_{x-2}^{2-x} dy \right)\ dx \\
&= \int_{-2}^{0} (2x + 4)\ dx + \int_{0}^{2} (4 - 2x)\ dx \\
&= 2 \left[\int_{-2}^{0} (x + 2)\ dx + \int_{0}^{2} (2 - x)\ dx \right] \\
&= 8
\end{aligned}$$

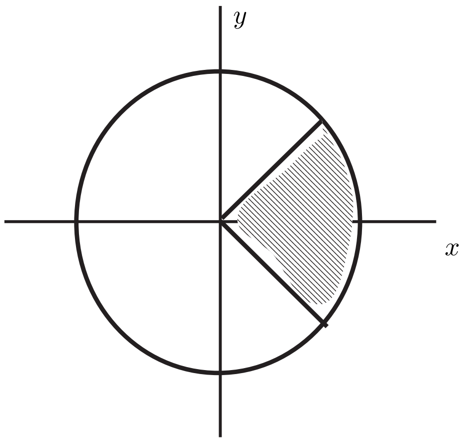
3. Nous avons par définition :

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D e^{\frac{1}{2}(x+y)}\ dx\ dy \\
&= \int_{-2}^{0}\left(\int_{-x-2}^{2+x} e^{\frac{1}{2}(x+y)}dy\right)\ dx + \int_{0}^{2}\left(\int_{x-2}^{2-x} e^{\frac{1}{2}(x+y)}dy\right)\ dx \\
&= 2\int_{-2}^{0} e^{\frac{1}{2}x}\left(e^{\frac{1}{2}x+1} - e^{-\frac{1}{2}x-1}\right)\ dx + 2\int_{0}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\left(e^{1-\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}x-1}\right)\ dx \\
&= 2\left[\int_{-2}^{0}(e^{x+1} - e^{-1})\ \ dx + \int_{0}^{2}\ (e - e^{x-1})dx\right] \\
&= 2\left[\left[e^{x+1} - e^{-1}x\right]_{-2}^{0} + [\left[ex - e^{x-1}\right]_{0}^{2}\right] \\
&= 2e - 6e^{-1} + 2e + 2e^{-1} \\
&= 4(e - \frac{1}{e})
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{I = 4(e - \frac{1}{e})}$$

Correction 2 1. Représentation graphique du domaine D_2. On constate que $\mathcal{A}_2 = \frac{\pi}{4}$.



TAB. 2 – Représentation graphique de D

2. Pour déterminer l'aire, on passe en coordonnées polaires.

$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ |y| \leqslant x,\ \text{et } x \geqslant 0\right\} \Leftrightarrow U_2 = \left\{(r,\theta) \text{ tels que } 0 \leqslant r \leqslant 1 \text{ et } \theta \in [0,\ \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi]\right\}$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= \iint\limits_{D_2} dx\ dy \\
&= \iint\limits_{U_2} r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r\ dr\ d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\int_0^1 r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\ d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\ d\theta \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

3. Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{A_2}\iint\limits_{D_2} x\ dx\ dy \\
&= \frac{1}{A_2}\iint\limits_{U_2} r^2\cos\theta\ dr\ d\theta \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r^2\cos\theta dr\ d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\int_0^1 \cos\theta\ dr\ d\theta \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\ d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\cos\theta\ \ d\theta\right] \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}
\end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{A_2}\iint\limits_{D_2} y\ dx\ dy \\
&= \frac{1}{A_2}\iint\limits_{U_2} r^2\sin\theta\ dr\ d\theta \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r^2\sin\theta dr\ d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\int_0^1 \sin\theta\ dr\ d\theta \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\ d\theta + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\sin\theta\ \ d\theta\right] \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}
\end{aligned}$$

Correction 3

Soit la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\left(-(5-\lambda)(4+\lambda)+18 = (5-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)\right)$$

   On a donc trois valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda &= 5 \\ \lambda &= 2 \\ \lambda &= -1 \end{cases}$$

2. Le polynôme caractéristique a trois racines distinctes. La matrice A est donc forcement diagonalisable.
3. Sous-espaces propres.
   (a) $\lambda = 5$. On cherche $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ tel que :

$$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-6y &= 5x \\ 3x+5y &= 5y \\ 3x+6y+5z &= 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x-6y &= 5x \\ 3x &= 0 \\ 3x+6y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z & \text{quelconque} \end{cases}$$

   On en déduit :

$$\boxed{E_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (0,0,z)\right\}}$$

(b) $\lambda = 2$. On cherche $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ tel que :

$$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -4x - 6y & = & 2x \\ 3x + 5y & = & 2y \\ 3x + 6y + 5z & = & 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -6x - 6y & = & 0 \\ 3x + 3y & = & 0 \\ 3x + 6y + 3z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & x \\ x & & \text{quelconque} \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\boxed{E_5 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, -x, x)\right\}}$$

(c) $\lambda = -1$. On cherche $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ tel que :

$$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -4x - 6y & = & -x \\ 3x + 5y & = & -y \\ 3x + 6y + 5z & = & -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x - 6y & = & 0 \\ 3x + 6y & = & 0 \\ 3x + 6y + 6z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2y \\ z & = & 0 \\ y & & \text{quelconque} \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\boxed{E_5 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (-2y, y, 0)\right\}}$$

4. Vecteurs propres.
   (a) $\lambda = 5$.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (b) $\lambda = 2$.

$$e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (c) $\lambda = 2$.

$$e_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Matrices.

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Partie B

1. Aucune difficulté particulière ! On retrouve la matrice A introduite dans la partie A.
2. Nous avons dans la partie précédente que la matrice A était diagonalisable et que $\mathrm{A} = \mathrm{Q}\ \mathrm{D}\ \mathrm{Q}^{-1}$. En reportant ceci dans l'équation vue plus haut, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \dot{X}(t) + \mathrm{A}\ X(t) & = & \Phi(t) \\ \dot{X}(t) + \mathrm{Q}\ \mathrm{D}\ \mathrm{Q}^{-1} X(t) & = & \Phi(t) \\ \mathrm{Q}^{-1}\dot{X}(t) + \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Q}\ \mathrm{D}\ \mathrm{Q}^{-1} X(t) & = & \mathrm{Q}^{-1}\Phi(t) \\ \mathrm{Q}^{-1}\dot{X}(t) + \mathrm{D}\ \mathrm{Q}^{-1} X(t) & = & \mathrm{Q}^{-1}\Phi(t) \\ \dot{Y}(t) + \mathrm{D}\ Y(t) & = & \Psi(t) \end{array}$$

3. Il faut finalement résoudre les trois équations différentielles suivantes :

$$\dot{y}_1(t) + 5y_1(t) = 10t + 7 \tag{1}$$
$$\dot{y}_2(t) + 2y_2(t) = -10t - 1 \tag{2}$$
$$\dot{y}_3(t) - y_3(t) = -9t - 1 \tag{3}$$

   (a) EHA.

i. $y_1(t) = c_1\ e^{-5t}$

ii. $y_2(t) = c_2\ e^{-2t}$

iii. $y_3(t) = c_3\ e^{-t}$

(b) Solution particulière. Pour chacune des équations (1), (2), (3), on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_i^{par}(t) = at + b$$

i. $y_1^{par}(t) = 2t + 1$

ii. $y_2^{par}(t) = -5t + 2$

iii. $y_3^{par}(t) = 9t + 10$

(c) On a donc :

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & c_1\ e^{-5t} + 2t + 1 \\ y_2(t) & = & c_2\ e^{-2t} - 5t + 2 \\ y_3(t) & = & c_3\ e^{-t} + 9t + 10 \end{array}$$

Ceci peut aussi s'écrire :

$$Y = \begin{bmatrix} c_1\ e^{-5t} + 2t + 1 \\ c_2\ e^{-2t} - 5t + 2 \\ c_3\ e^{-t} + 9t + 10 \end{bmatrix}$$

La prise en compte des conditions initiales (CI_y) conduit à la détermination des constantes c_i pour obtenir :

$$\boxed{Y = \begin{bmatrix} -\ e^{-5t} + 2t + 1 \\ -2\ e^{-2t} - 5t + 2 \\ -10\ e^{-t} + 9t + 10 \end{bmatrix}}$$

4. Pour déterminer la solution X, on utilise la relation : $Y(t) = \mathrm{Q}^{-1}X(t)$ soit $X(t) = \mathrm{Q}Y(t)$. On a donc :

$$X(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\ e^{-5t} + 2t + 1 \\ c_2\ e^{-2t} - 5t + 2 \\ c_3\ e^{-t} + 9t + 10 \end{bmatrix}$$

Soit encore,

$$X(t) = \begin{bmatrix} c_2\ e^{-2t} - 2c_3\ e^{-t} - 23t - 18 \\ c_3\ e^{-t} - c_2\ e^{-2t} + 14t + 8 \\ c_1\ e^{-5t} + c_2\ e^{-2t} - 3t + 3 \end{bmatrix}$$