MT31 Automne 06 **Vendredi 19 Janvier 2007**

Final de l'UV MT31

Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

➟ **Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.**
➟ **Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.**

Exercice 1

Soit D_1 le domaine du plan défini par :

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \quad x^2 \leqslant 2y \leqslant 2x + 8\right\}$$

1. Représenter graphiquement le domaine D_1.
2. Calculer $\mathcal{A}_1$ l'aire de D_1.
3. Calculer les coordonnées $(x_{G_1},\ y_{G_1})$ du centre de gravité G_1 de D_1.

Exercice 2

Soit D_2 le domaine du plan défini par :

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \quad x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |x| \leqslant y\right\}$$

1. (a) Représenter graphiquement le domaine D_2.
   (b) Déterminer graphiquement $\mathcal{A}_2$ l'aire de D_2.
2. Retrouver $\mathcal{A}_2$ l'aire de D_2 en utilisant la définition.
3. Calculer les coordonnées $(x_{G_2},\ y_{G_2})$ du centre de gravité G_2 de D_2.

Exercice 3

Partie A Soit la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire les valeurs propres de A.
3. La matrice A est diagonalisable. Pourquoi ?
4. Déterminer les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre.
5. En déduire les vecteurs propres associés à chaque valeur propre.
6. En déduire la matrice D diagonale et la matrice Q inversible telles que : $\mathrm{A} = \mathrm{Q\ D\ Q}^{-1}$

Remarques
– on rangera les valeurs propres dans l'ordre décroissant.
– on ne demande pas le calcul de Q^{-1}.

Partie B

On se propose de résoudre le système différentiel suivant :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} \dot{x}_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) + x_1(t) + x_2(t) = 0 \\ \dot{x}_3(t) + x_1(t) - 3x_2(t) + 4x_3(t) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$(\mathrm{CI}) \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme matricielle

$$\dot{X}(t) + \mathrm{A}\ X(t) = \Phi(t) \tag{1}$$

   où les quantités $\dot{X}(t)$, $X(t)$ et $\Phi(t)$ sont à spécifier.
2. Montrer que le système (S) est équivalent à :

$$\dot{Y}(t) + \mathrm{D}\ Y(t) = \Psi(t), \tag{2}$$

   où les quantités $\dot{Y}(t)$, $Y(t)$, D et $\Psi(t)$ sont à spécifier.
3. Déterminer Y solution de l'équation 2.
4. Déterminer finalement X solution de l'équation 1.