Final- MT31 - Mathématiques : Applications

Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

➟ **Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.**

➟ **Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.**

Exercice 1 (Centre de gravité de plaques)

On se propose dans ce problème de déterminer dans le repère orthonormal $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ les coordonnées du centre de gravité d'une plaque P d'épaisseur négligeable. Cette plaque est obtenue en soudant deux plaques P_1 et P_2 de masse surfacique $\rho(x, y)$ supposée **constante**.

➪ La plaque P_1 est un carré dont les sommets sont les quatre points : $A = (0, 2)$, $C = (0, -2)$, $D = (-4, -2)$ et $E = (-4, 2)$.

➪ La plaque P_2 est le domaine défini par :

$$P_2 = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 /\quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \quad et \quad |y| \leqslant (2-x)e^x\right\}$$

1. Représenter graphiquement la plaque P sur la figure 1.
2. Calculer $\mathcal{A}_P$ l'aire de cette plaque P.
3. Rappeler l'expression des coordonnées x_G et y_G du centre de gravité de cette plaque.
4. Déterminer x_G et y_G.

Exercice 2 (Intégrales doubles)

Soit D le domaine du plan défini par :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geqslant 1 \quad et \quad x^2 + y^2 \leqslant 2y\right\}$$

1. Représenter le domaine D sur la figure 2.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}_D$ du domaine D.
3. Calculer l'intégrale:

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

Exercice 3 (Diagonalisation et système différentiel)

Partie A

On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour tout $t \in I$ la matrice $A(t)$ suivante:

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 0 & t & t \\ 0 & t & t \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $A(t)$.
2. (a) En déduire les valeurs propres de $A(t)$.
   (b) La matrice $A(t)$ est diagonalisable. Pourquoi ?
3. (a) Déterminer les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre.
   (b) En déduire les vecteurs propres associés à chaque valeur propre.
4. En déduire la matrice $D(t)$ diagonale et la matrice Q inversible telles que: $A(t) = \mathrm{Q}\ \mathrm{D}(t)\ \mathrm{Q}^{-1}$

   Remarques:

   - on rangera les valeurs propres dans l'ordre croissant.
   - on ne demande pas le calcul de Q^{-1}.

Partie B

Sur I, on considère le système différentiel

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = A(t)\mathbf{X}(t) \qquad (\mathcal{S})$$

où

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad et \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$$

On note $\boldsymbol{\phi}(t)$ une solution de $(\mathcal{S})$.

1. Que signifie que $\phi(t)$ est une solution de $(\mathcal{S})$?
2. Soit $\boldsymbol{\phi}(t)$ une solution de $(\mathcal{S})$. Pour tout $t \in I$, on pose $\boldsymbol{\psi}(t) = Q^{-1}\boldsymbol{\phi}(t)$. Montrer que $\boldsymbol{\psi}(t)$ est solution du système:
$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = D(t)\mathbf{Y}(t) \qquad (\mathcal{S}_1)$$
   où les quantités $\dot{\mathbf{Y}}$ et $\mathbf{Y}(t)$ sont à spécifier.
3. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que:
$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b\ e^{\frac{t^2}{2}} \\ c\ e^{t^2} \end{pmatrix}$$
4. En déduire $\boldsymbol{\phi}(t)$ en fonction de t, a, b et c.
5. Trouver toutes les solutions du système :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) - t\ x(t) - t\ y(t) = & 0 \\ \dot{y}(t) - t\ y(t) - t\ z(t) = & 0 \\ \dot{z}(t) - t\ y(t) - t\ z(t) = & 0 \end{cases}$$
   telles que $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ et $z(0) = 4$.

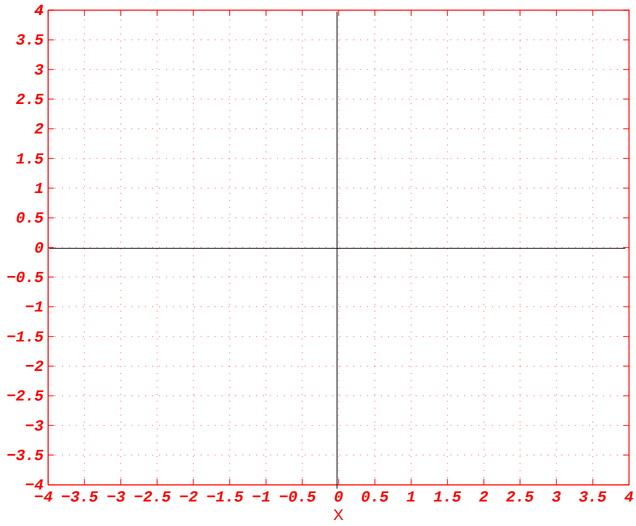

Figure 1: Plaque

.

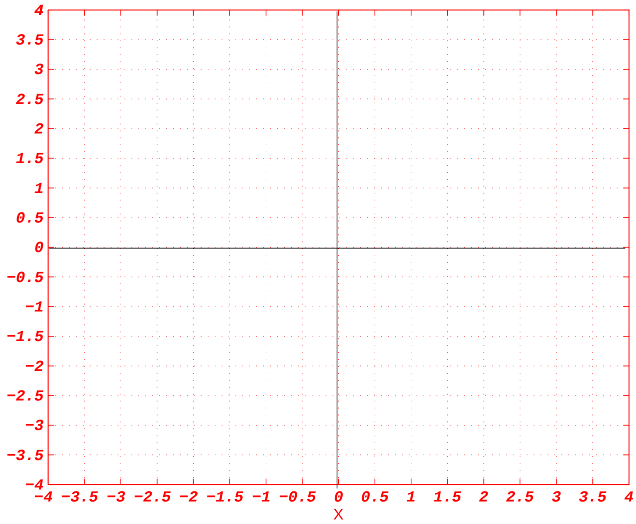

Figure 2: Domaine $\mathcal{D}$

.