Final - MT31 - Mathématiques : Applications

Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

- ➟ **Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.**
- ➟ **Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.**

Exercice 1

Soit l'intégrale double

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

où D est le triangle de sommets $A = (0,0)$; $B = (1,0)$; $C = (1,1)$.

1. Evaluez cette intégrale en utilisant les coordonnées cartésiennes.

2. Evaluez cette intégrale en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 2

Soit le domaine D défini par :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \quad |x| \leqslant y \quad et \quad y + x^2 \leqslant 2\right\}$$

1. Etude de D.

1.1. Representer graphiquement le domaine D.

1.2. Calculer l'aire de D.

2. On suppose ici que $\rho(x,y)$ la densité surfacique de cette plaque est constante. Calculer les coordonnées x_G et y_G de son centre de gravité.

Exercice 3 (Diagonalisation et système différentiel)

Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Etude de la matrice A.

1.1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

1.2. En déduire les valeurs propres de A.

1.3. Déterminer les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre.

1.4. En déduire les vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

1.5. La matrice A est diagonalisable. Pourquoi ?

1.6. En déduire la matrice D diagonale et la matrice Q inversible telles que : $A = \mathrm{Q}\ \mathrm{D}\ \mathrm{Q}^{-1}$

Remarques On rangera les valeurs propres dans l'ordre croissant pour obtenir

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. On considère le système différentiel suivant :

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) + y(t) = t \\ \dot{y}(t) + z(t) = t \\ \dot{z}(t) + 6x(t) - 11y(t) + 6z(t) = 2t \end{cases}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$(\mathrm{CI}) \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

2.1. Vérifier que le système (S) est équivalent à :

$$\dot{\mathbf{X}}(t) + A\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) \tag{1}$$

où les quantités $\dot{\mathbf{X}}(t)$, $\mathbf{X}(t)$ et $\boldsymbol{\psi}(t)$ sont à spécifier.

2.2. Montrer que le système (S) est équivalent à :

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) + D\mathbf{Y} = \boldsymbol{\gamma}(t) \tag{2}$$

où les quantités $\dot{\mathbf{Y}}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ et $\boldsymbol{\gamma}(t)$ sont à spécifier.

2.3. Déterminer $\mathbf{Y}(t)$ solution de l'équation 2.

2.4. Déterminer finalement $\mathbf{X}(t)$ solution de l'équation 1.