Final MT31

Durée 2h
Documentation et calculatrice autorisées

Exercice 1 (4)
Soit l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y}(t) - y(t) = 0 \qquad (1)$$

Nous souhaitons la résoudre sous la forme d'un système d'équations différentielles comme suit :

$$\dot{Y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y(t) \qquad (2)$$

où $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$.

Prenons les deux états initiaux suivants $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ que nous notons respectivement $Y_1(0)$ et $Y_2(0)$. Soient $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ les solutions respectives de l'équation (2) aux états initiaux $Y_1(0)$ et $Y_2(0)$.

1- Calculer $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$.
2- Donner l'expression de $Y(t)$ en fonction de $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, a et b, avec $y(0)=a$ et $\dot{y}(0)=b$.

Exercice 2 (4)

1- Résoudre l'équation différentielle suivante : $\ddot{y}+0,5\dot{y}+0,04y=e^t$.

Exercice 2 (6)
Nous souhaitons accrocher un objet métallique d'épaisseur négligeable. Pour ce faire, nous désirons calculer son centre de gravité. Il s'agit d'une plaque homogène définie par $P=\left\{(x,y)\in\Re^2 / 0\leq x\leq 1, |y|\leq \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}$, dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Représenter graphiquement la plaque.
2- Calculer l'aire de la plaque.
3- Rappeler l'expression des coordonnées x_g et y_g du centre de gravité de la plaque.
4- Calculer x_g et y_g et représenter le centre de gravité sur le graphique.

Exercice 3 (6)
Soit l'intégrale double suivante :

$I=\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où D est le losange de sommets $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(0,-1)$ et $D(-1,0)$.

1- Décrire le domaine d'intégration.
2- Calculer l'intégrale.

Bon courage