MT31 Automne 2010 **Jeudi 20 janvier 2011**

Final - MT31 - Mathématiques : Applications

Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

- Les exercices 1,2 et 3 sont indépendants.
- Toute réponse non justifiée sera ignorée.
- Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.

Exercice 1

Une colline (Figure 1), dont le sommet atteint une altitude de 10m, peut être modélisée sur un espace à deux dimensions comme une fonction de deux variables x et y. L'altitude est alors donnée par la relation :

$$f(x,y) = 10\, e^{-\frac{x^2+y^2}{20}}$$

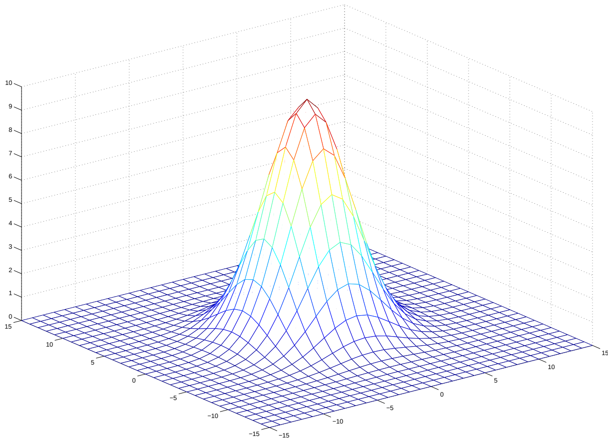

Figure 1 – Une colline ...

1. Comment se nomme l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y)$ ayant une même altitude h ?
2. Déterminer et tracer schématiquement l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y)$ ayant une même altitude h avec $1 < h < 10$.
3. Calculer le gradient de f.
4. Déterminer le/les points critiques de f. Les représenter sur la figure 1.

Exercice 2

Soit $\mathbf{V}$ le champ de vecteurs défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\mathbf{V}(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} \mathrm{V}_1(x,\ y,\ z) \\ \mathrm{V}_2(x,\ y,\ z) \\ \mathrm{V}_3(x,\ y,\ z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ x \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ y \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Calculer, $\nabla \cdot \mathbf{V}$, la divergence de $\mathbf{V}$.
2. Calculer, $\nabla \wedge \mathbf{V}$, le rotationnel de $\mathbf{V}$.
3. Pourquoi peut-dire que $\mathbf{V}$ dérive d'un potentiel scalaire ? Que cela signifie-t-il ?
4. Montrer que le potentiel scalaire $\phi(x,y,z)$ dont dérive $\mathbf{V}(x,y,z)$ est :

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}$$

   où C est une constante.
5. On se propose maintenant d'étudier ce champ de vecteurs en coordonnées cylindriques.
   (a) Pourquoi semble-t-il judicieux de changer le système de coordonnées ?
   (b) Exprimer $\phi(x,y,z)$ en coordonnées cylindriques.
   (c) Calculer, $\nabla\phi$, le gradient de ϕ en coordonnées cylindriques.
   (d) Donner l'expression de $\mathbf{V}$ en coordonnées cylindriques. Calculer son rotationnel.

Nous rappelons les expressions du gradient, de la divergence, du rotationnel en coordonnées *cylindriques* exprimées dans la base locale $(\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e_z})$.

Gradient	$\nabla f(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$
Rotationnel	$\nabla \wedge \mathrm{V}(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{V}_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{V}_\theta) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{V}_r) - \frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{V}_z) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{V}_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{V}_r)\right) \end{pmatrix}$
Divergence	$\nabla.\mathrm{V}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathrm{V}_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{V}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial \mathrm{V}_z}{\partial z}$

Exercice 3

On considère une plaque mince dont l'épaisseur est négligeable. On suppose donc qu'elle peut être représentée par un domaine D du plan défini par :

$$\mathrm{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0 \quad et \quad y \leqslant -x^2+1\right\}$$

1. Représenter graphiquement le domaine D.
2. Calculer $\mathcal{A}$ l'aire de D.
3. Calculer les coordonnées $(x_{\mathrm{G}},\ y_{\mathrm{G}})$ du centre de gravité G de D.