Automne 2005
Vendredi 25 novembre 2005

Médian de l'UV MT31

Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

Exercice 1

1. Calculer la dérivée de la fonction
$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$$
2. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction
$$g(x) = x \ \cos x$$

Exercice 2
On considère le système linéaire (S) et la matrice A définis par :
$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 1 \\ x + ay + z & = & 1 \\ x + y + az & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}$$

1. On suppose $a = 1$.
   (a) La matrice A est-elle inversible ?
   (b) Le sysyème (S) admet-il une solution ?
2. On suppose $a = 0$.
   (a) La matrice A est-elle inversible ?
   (b) Le sysyème (S) admet-il une solution ?
3. Discuter et résoudre (S) suivant les valeurs du réel a.

Exercice 3
Soit V le champ de vecteurs défini en coordonnées cartésiennes par :
$$V(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} z^3\ e^x - z\ y\ \sin x \\ f(x,z) \\ 3z^2\ e^x + y \cos x + \frac{y}{z} + 2z\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,z) & \rightarrow & f(x,z) \end{array} \right. \tag{1}$$

La fonction f est supposée «régulière».

1. Calculer le rotationnel de V.
2. On cherche à déterminer les applications f pour que V soit un champ de gradients, i.e. $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{V} = 0$.
   (a) Quelles conditions doivent alors vérifier $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,z)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,z)$?
   (b) Montrer qu'il existe $f_1(z)$ telle que
$$f(x,z) = z \cos x + f_1(z) \tag{2}$$
   (c) Montrer qu'il existe une constante c_1 telle que
$$f_1(z) = \ln z + z^2 + c_1 \tag{3}$$
   (d) Déduire des questions précédentes l'expression de f et vérifier que dans ce cas précis, $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{V} = 0$.

3. Nous considérons maintenant la fonction f obtenue à la question précédente (avec $c_1 = 0$), i.e. telle que $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{V} = 0$.

   (a) Que peut-on en déduire ?

   (b) Montrer que si ϕ est un champ scalaire vérifiant

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) = V_1(x, y, z),$$

   alors, il existe $\phi_1(y, z)$ tel que

$$\phi(x, y, z) = z^3 \ e^x + z \ y \ \cos x + \phi_1(y, z) \tag{4}$$

   (c) Montrer que, si

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) = V_2(x, y, z),$$

   alors, il existe $\phi_2(z)$ tel que

$$\phi_1(y, z) = y \ \ln z + z^2 \ y + \phi_2(z). \tag{5}$$

   (d) Montrer que, si

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z) = V_3(x, y, z),$$

   alors, il existe une constante c_2 telle que

$$\phi_2(z) = c_2. \tag{6}$$

   (e) Déduire des questions précédentes l'expression de $\phi(x, y, z)$.

Automne 2005
Vendredi 25 novembre 2005

Correction du médian de l'UV MT31

Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

Correction 1 1. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

Correction 2

1. On suppose $a = 1$.
   (a) La matrice A est donnée par :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   La matrice A n'est pas inversible car $L_1 = L_2$.
   (b) Le sysyème (S) n'a pas de solution unique. Deux cas sont envisageables :
   – Pas de solutions,
   – Une infinité de solution.
2. On suppose $a = 0$.
   (a) La matrice A est donnée par :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   La matrice A est inversible car $det A = 2 \neq 0$.
   (b) Le sysyème (S) admet une solution unique.
3. On résout le système en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
   $$(S)\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & 1 \\ x+y+az & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ (a^2-1)y+(a-1)z & = & a-1 \\ (1-a)y+(a-1)z & = & 0 \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ (a-1)(a+1)y+(a-1)z & = & a-1 \\ (1-a)(y-z) & = & 0 \end{array}\right.$$
   Si $a = 1$, on constate que le système a une infinité de solutions. En effet, nous avons :
   $$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$
   On suppose maintenant que $a \neq 1$. Le système peut alors s'écrire après simplification :
   $$(S)\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ (a+1)y+z & = & 1 \\ y-z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ (a+1)y+z & = & 1 \\ (a+2)y & = & 1 \end{array}\right.$$
   On est amené à distinguer deux cas :
   – $a = -2$, le système n'a pas de solution.

– $a \neq -2$, le système a une solution unique donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{a+2} \\ y & = & \frac{1}{a+2} \\ z & = & \frac{1}{a+2} \end{array}\right.$$

En résumé, nous avons :
– $a = 1$, (S) a une infinité de solution.
– $a = -2$, (S) n'a pas de solution.
– Sinon, (S) a une solution unique.

Correction 3

Soit V le champ de vecteurs défini en coordonnées cartésiennes par :

$$V(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} z^3\ e^x - z\ y\ \sin x \\ f(x,z) \\ 3z^2\ e^x + y\cos x + \frac{y}{z} + 2zy \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,z) & \rightarrow & f(x,z) \end{array}\right. \qquad (1)$$

1. Cacul de $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{V}$.

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_3}{\partial y}(x,y,z) - \dfrac{\partial V_2}{\partial z}(x,y,z)) \\ \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial z}(x,y,z) - \dfrac{\partial V_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial x}(x,y,z) - \dfrac{\partial V_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + \frac{1}{z} + 2z - \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,z) \\ 3z^2\ e^x - y\ \sin x - (3z^2\ e^x - y\sin x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,z) + z\ \sin x \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos x + \frac{1}{z} + 2z - \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,z) \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,z) + z\ \sin x \end{pmatrix}}$$

2. On cherche à déterminer les applications f pour que V soit un champ de gradients, i.e. $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{V} = 0$.

(a) Si $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{V} = 0$, nous avons forcement :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,z) & = & \cos x + \frac{1}{z} + 2z \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,z) & = & -z\sin x \end{array}}$$

(b) On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,z) = -z\sin x \Rightarrow f(x,z) = z\cos x + f_1(z)$$

(c) On sait que :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,z) = \cos x + \frac{1}{z} + 2z$$

et que

$$f(x,z) = z\cos x + f_1(z)$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \cos x + \dfrac{1}{z} + 2z & = & \cos x + f_1'(z) \\ f_1'(z) & = & \dfrac{1}{z} + 2z \end{array}$$

On a donc :

$$\boxed{f_1(z) = \ln z + z^2 + c_1}$$

(d) Finalement, f est donnée par :

$$\boxed{f(x,z) = z\cos x + \ln z + z^2 + c_1}$$

3. On suppose $f(x,z) = z\cos x + \ln z + z^2$.

(a) On a $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{V} = 0$. Il existe donc un champ scalaire tel que :

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{V}$$

(b) On commence par V_1 :

$$\begin{aligned} V_1(x,y,z) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) &= z^3\ e^x - z\ y\ \sin x \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x, on obtient :

$$\phi(x,y,z) = z^3\ e^x + z\ y\ \cos x + \phi_1(y,z)$$

(c) On a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) = V_2(x,y,z) = z\cos x + \ln z + z^2$$

Mais d'après la question précedente, nous avons aussi :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) = z\cos x + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(y,z)$$

On en déduit :

$$z\cos x + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(y,z) = z\cos x + \ln z + z^2 \Rightarrow \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(y,z) = \ln z + z^2$$

Soit en intégrant par rapport à y :

$$\phi_1(y,z) = y\ln z + yz^2 + \phi_2(z)$$

(d) On a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = V_3(x,y,z) = 3z^2\ e^x + y\cos x + \frac{y}{z} + 2z\ y$$

Mais d'après la question précedente, nous avons aussi :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + y\cos x + \frac{y}{z} + 2zy + \phi_2'(z) = 3z^2\ e^x + y\cos x + \frac{y}{z} + 2z\ y$$

On en déduit :

$$\phi_2'(z) = 0$$

Soit en intégrant par rapport à y :

$$\phi_2(z) = c_2$$

(e) On a finalement l'expression du potentiel ϕ :

$$\boxed{\phi(x,y,z) = z^3\ e^x + z\ y\ \cos x + y\ln z + yz^2 + c_2}$$