Médian de l'UV MT31

Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

- **Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.**
- **Les** 4 **exercices sont indépendants**.

Exercice 1
Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction

$$g(x) = e^{\sqrt{3}\ x}\ \sin x$$

Exercice 2
On considère le système linéaire (S) défini par :

$$(S)\ \begin{cases} (1+\gamma)\ x + y + z + t &= 1 \\ x + (1+\gamma)\ y + z + t &= 1 \\ x + y + (1+\gamma)\ z + t &= 1 \\ x + y + z + (1+\gamma)\ t &= 1 \end{cases} \qquad \text{où } \gamma \in \mathbb{R}.$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme :
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
où la matrice A est à préciser.
2. Résoudre suivant les valeurs de γ le système linéaire (S).
3. En déduire les valeurs de γ pour lesquelles la matrice A est inversible.
4. Déterminer A^{-1} pour $\gamma = 1$.

Exercice 3
Soit $\mathbf{V}$ le champ de vecteurs défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\mathbf{V}(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} V_1(x,\ y,\ z) \\ V_2(x,\ y,\ z) \\ V_3(x,\ y,\ z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{z}{x} + \dfrac{y}{z} \\ \dfrac{x}{z} \\ ln\ x - \dfrac{xy}{z^2} + \dfrac{1}{z} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Partie 1

1. Calculer, $\nabla \cdot \mathbf{V}$, la divergence de $\mathbf{V}$.
2. Calculer, $\nabla \wedge \mathbf{V}$, le rotationnel de $\mathbf{V}$.
3. Que peut-on en déduire ?

4. Montrer que si $\phi(x, y, z)$ est un champ scalaire vérifiant
$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) = V_2(x, y, z),$$
alors, il existe $\phi_1(x, z)$ tel que
$$\phi(x, y, z) = \frac{xy}{z} + \phi_1(x, z) \tag{2}$$
5. Montrer que, si
$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) = V_1(x, y, z),$$
alors, il existe $\phi_2(z)$ tel que
$$\phi_1(x, z) = z\ ln\ x + \phi_2(z). \tag{3}$$
6. Montrer que, si
$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z) = V_3(x, y, z),$$
alors, il existe une constante c_2 telle que
$$\phi_2(z) = ln\ z + c_2. \tag{4}$$
7. Déduire des questions précédentes l'expression de $\phi(x, y, z)$.

Partie 2

Soit $\mathbf{W}$ le champ de vecteurs défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\mathbf{W}(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} W_1(x,\ y,\ z) \\ W_2(x,\ y,\ z) \\ W_3(x,\ y,\ z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{x} \\ \frac{y^2 x}{z^3} \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix} \tag{5}$$

8. Calculer
   (a) $\nabla \cdot \mathbf{W}$, la divergence de $\mathbf{W}$.
   (b) $\nabla \wedge \mathbf{W}$, le rotationnel de $\mathbf{W}$.
9. Déterminer, $\nabla \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{V})$, la divergence de $\mathbf{W} - \mathbf{V}$.
10. Le champ $\mathbf{W} - \mathbf{V}$ dérive-t-il
    (a) d'un potentiel scalaire ?
    (b) d'un potentiel vecteur ?
11. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs $\mathbf{B}(x,\ y,\ z)$ tel que :
$$\mathbf{W}(x,\ y,\ z) = \nabla \wedge \mathbf{B}(x,\ y,\ z) + \boldsymbol{\nabla}\phi(x,\ y,\ z)$$

Exercice 4

On donne, en coordonnées cylindriques, l'expression du champ $\mathbf{V}$
$$\mathbf{V}(r, \theta, z) = \frac{k}{r^3}\ \mathbf{u_r}$$
où k est une constante.

1. Montrer que $\boldsymbol{V}$ admet un potentiel scalaire $\phi(r,\ \theta,\ z)$.
2. Déterminer $\phi(r,\ \theta,\ z)$.