Médian - MT31 - Mathématiques : Applications

Durée : **2 heures**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

➟ **Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.**

➟ **Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.**

Exercice 1

Associer un des graphes à la fonction $z = f(x,y)$ représentée par ses courbes de niveau.

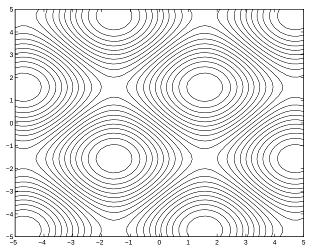

Figure 1: $f(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

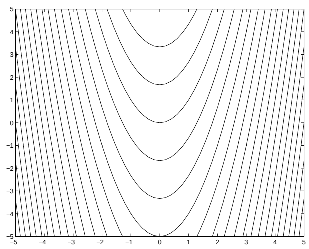

Figure 2: $f(x,y) = y - x^2$

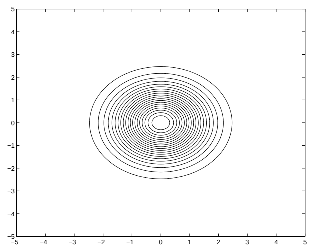

Figure 3: $f(x,y) = sin(x) + sin(y)$

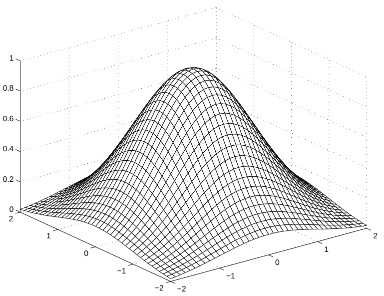

Figure 4: $f(x,y) = z$

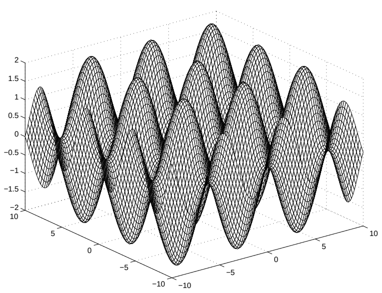

Figure 5: $f(x,y) = z$

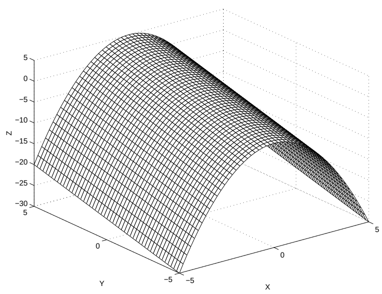

Figure 6: $f(x,y) = z$

Exercice 2

On considère le système linéaire $\mathcal{S}$ suivant:

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & az & = & 3 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2 \end{array} \right.$$

1. Ecrire le système sous la forme matricielle :

$$A\ X = B$$

   où les expressions de A et B sont à donner.

2. (a) Déterminer les valeurs de a de telle sorte que le système $\mathcal{S}$ ait **une solution unique**.
   (b) Déterminer dans ce cas, la solution.

3. Déterminer les valeurs de a de telle sorte que le système $\mathcal{S}$ n'ait **aucune solution**.
4. (a) Déterminer les valeurs de a de telle sorte que le système $\mathcal{S}$ ait **plus d'une solution**.
   (b) Donner dans ce cas, la forme des solutions.
5. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est inversible ?

Exercice 3

On considère une colline dont l'altitude z est donnée par :

$$z(x,\ y) = -x^2 - y^2 + 8x \tag{1}$$

où $(x,\ y)$ sont les coordonnées géographiques d'un point de la colline.

1. On souhaite visualiser l'allure du relief par ses lignes de niveau.
   (a) Quelle équation permet de définir l'ensemble des points $M(x, y)$ ayant une altitude h ?
   (b) Montrer que les lignes de niveau sont des cercles dont on précisera le rayon et le centre.
   (c) Représenter graphiquement tous les points ayant une altitude $h = 12$?
2. Calculer le vecteur $\vec{\nabla} z(x,\ y)$, gradient de $z(x,\ y)$.
3. Calculez le gradient de z au point $A = (4, 2)$. Montrez que ce vecteur est normal à la courbe de niveau contenant A.

Exercice 4

Dans ce problème on se place en coordonnées *cylindriques*. On considère le champ $\boldsymbol{E}(r,\ \theta,\ z)$ défini en coordonnées cylindriques par:

$$\boldsymbol{E}(r,\ \theta,\ z) = \frac{2k\cos\theta}{r^3}\ \boldsymbol{e_r} + \frac{k\sin\theta}{r^3}\ \boldsymbol{e_\theta}$$

1. Calculer la divergence de $\boldsymbol{E}(r,\ \theta,\ z)$.
2. Calculer le rotationnel de $\boldsymbol{E}(r,\ \theta,\ z)$.
3. Que peut on en déduire ?
4. Montrer que $\phi(r,\ \theta,\ z)$ le potentiel scalaire dont dérive $\boldsymbol{E}$ est de la forme:

$$\phi(r,\ \theta,\ z) = -\frac{k\cos\theta}{r^2} + C$$

   où C est une constante.
5. Exprimer $\phi(r,\ \theta,\ z)$ en coordonnées cartésiennes.
6. En déduire l'expression de $\boldsymbol{E}(r,\ \theta,\ z)$ en coordonnées cartésiennes.