Médian - MT31 - Mathématiques : Applications

Durée : **2 heures**.
Seuls les polycopiés et les notes personnelles sont autorisés.
Calculatrice autorisée.

- **Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.**
- **Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.**

Exercice 1

Soit V le champ de vecteurs défini en coordonnées cartésiennes par :

$$V(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} f(y,z) \\ xz\ \cos(yz) + \frac{1}{y} \\ xy\ \cos(yz) + \frac{1}{z} + x\ e^z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (y,z) & \to \quad f(y,z) \end{cases} \tag{1}$$

La fonction f est supposée «régulière».

1. Recherche de la forme de f.

1.1. Exprimer le rotationnel de V en fonction de f et de ses dérivées partielles.

1.2. On cherche à déterminer les applications f pour que V dérive d'un champ scalaire.

i. Quelles conditions doivent alors vérifier $\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,z)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(y,z)$?

ii. Montrer qu'il existe une fonction $f_1(z)$ telle que

$$f(y,z) = \sin(yz) + f_1(z) \tag{2}$$

iii. Montrer qu'il existe une constante c_1 telle que

$$f_1(z) = e^z + c_1 \tag{3}$$

iv. A partir des questions précédentes, en déduire que f est donnée par

$$f(y,z) = \sin(yz) + e^z + \ c_1$$

et vérifier que dans ce cas précis, V dérive bien d'un champ scalaire.

2. Nous considérons maintenant la fonction f obtenue à la question précédente (avec $c_1 = 0$),

$$f(y,z) = \sin(yz) + e^z$$

i.e. telle que V dérive d'un champ scalaire. On veut maintenant déterminer ce champ scalaire $\phi(x,\ y,\ z)$.

2.1. Montrer que si ϕ est un champ scalaire vérifiant

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) = V_1(x,y,z),$$

alors, il existe $\phi_1(y,z)$ tel que

$$\phi(x,y,z) = x(\sin(yz) + e^z) + \phi_1(y,z) \tag{4}$$

2.2. Montrer que, si

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) = V_2(x,y,z),$$

alors, il existe $\phi_2(z)$ tel que

$$\phi_1(y,z) = ln(y) + \phi_2(z). \tag{5}$$

2.3. Montrer que, si

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = V_3(x,y,z),$$

alors, il existe une constante c_2 telle que

$$\phi_2(z) = ln(z) + c_2. \tag{6}$$

3. Déduire des questions précédentes l'expression de $\phi(x,y,z)$.

Exercice 2

Dans la suite m désigne un paramètre et x, y et z sont trois inconnues. On considère le système linéaire $\mathcal{S}$ suivant :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} m\,x & + & y & - & z & = & m-3 \\ 2x & + & (m-1)\,y & + & z & = & 2m-5 \\ x & + & m\,y & + & (m-2)\,z & = & 2m-4 \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous la forme matricielle :

$$A\ X = B$$

où les expressions de A et B sont à donner.

2. Pour quelles valeurs de m, la matrice A est inversible ?

3. **3.1.** Déterminer les valeurs de m de telle sorte que le système $\mathcal{S}$ ait **une solution unique**.

3.2. Déterminer dans ce cas, la solution unique de $\mathcal{S}$.

4. **4.1.** Déterminer les valeurs de m de telle sorte que le système $\mathcal{S}$ ait **plus d'une solution**.

4.2. Donner dans ce cas, la forme des solutions de $\mathcal{S}$.

5. Déterminer les valeurs de m de telle sorte que le système $\mathcal{S}$ n'ait **aucune solution**.

Exercice 3

Soit la fonction $f(x,y)$ définie par :

$$f(x,y) = x^2 + 4\ y^2$$

1. Déterminer le gradient de f au point (x,y).

2. Pour tout $k > 0$, décrire la ligne de niveau k de f.

3. Répresenter graphiquement la ligne de niveau $k = 4$.

4. Est-ce que le gradient de f en $(0,1)$ est orthogonal à la courbe de d'équation $x^2 + 4y^2 = 4$? Justifier la réponse et donner une démonstration.