Médian MT31 Automne 2009

Durée : 2 heures.

Seuls les polycopiés et les notes personnelles sont autorisés.

Calculatrice autorisée.

- Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.
- Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.

Exercice 1 :

Soit le champ de vitesse défini par : $V(x,y,z)=-y\boldsymbol{u}_x+x\boldsymbol{u}_y+0\boldsymbol{u}_z$

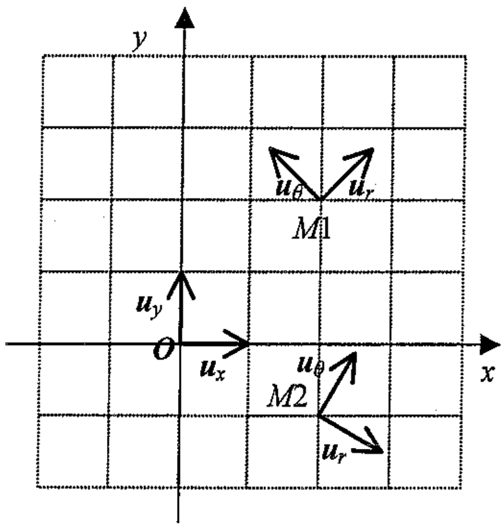
1- Calculer $\nabla\wedge V$.

Dans la suite, nous voulons exprimer ce champ vectoriel en coordonnées cylindriques. Nous rappelons qu'un vecteur $\mathbf{OM}=x\boldsymbol{u}_x+u\boldsymbol{u}_y+z\boldsymbol{u}_z$ est repéré en coordonnées cylindriques comme suit :

$$\mathbf{OM}=r\boldsymbol{u}_r+z\boldsymbol{u}_z, \qquad (1)$$

avec $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

2- En utilisant la figure ci-dessous, représenter les vitesses aux points $M1$ et $M2$ et donner leur expression en coordonnées cylindriques.



3- Donner l'expression de $V(r,\theta,z)$ en coordonnées cylindriques.

4- Vérifier le résultat $\nabla\wedge V$.

Traitons la cinématique d'une manière générale. Rappelons la relation (1) :

$$\mathbf{OM}(t)=r(t)\boldsymbol{u}_r+z(t)\boldsymbol{u}_z, \qquad (1)$$

5- Sachant que $d(\boldsymbol{u}_r)/d(t)=d\theta/d(t)\boldsymbol{u}_\theta$ et que $d(\boldsymbol{u}_z)/d(t)=0$, calculer $d(OM)/d(t)$. (Il suffit de dériver l'expression d'**OM**)

6- Sachant que le champ vectoriel $\boldsymbol{V}$ est un champ de vitesse, donner les expressions de r(t), de $\theta(t)$ et de $z(t)$.

Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x,y,z)$ définie par : $f(x,y,z)= x^2-2nx+y^2+z^2$ avec n une constante.

1- Donner l'expression de $V(x,y,z)$ le gradient de $f(x,y,z)$.

2- Donner l'expression du rotationnel de $V(x,y,z)$.

3- Démontrer que la courbe de niveau 0 est une sphère de centre $(n,0,0)$ et de rayon n.
4- Représenter graphiquement cette courbe pour $n=1$ et $z=0$, ainsi que les gradients des différents points sur cette courbe.
5- Donner l'expression de $f(r,\theta,\phi)$ en coordonnées sphériques.
6- A quoi correspond l'ensemble des solutions de l'équation $r^2-2nr\cos(\theta)\cos(\phi)=0$ en coordonnées sphériques ?

Exercice 3 :

Soit la matrice A définie comme suit : $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

1- Est-ce une matrice inversible ? Si oui calculer sa matrice inverse.

Soit le système $AX=X'$ où $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ et $X'=\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$.

2- Définir la matrice B pour que $BX'=X$.

3- En utilisant la matrice B donner la valeur du vecteur X, afin que $AX=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 4 :

Donner les dérivées d'ordre n des fonctions suivantes :

1- $f(x)=e^x(\cos(x)+\sin(x))$
2- $g(x)=e^x(\cos^2(2x+\pi/4)+\sin^2(2x+\pi/4))$

Bon courage