MT32 - Final

Durée : **2h**.
Une feuille A4 recto seul de notes autorisée.
Calculatrice autorisée.

- Toute réponse non justifiée sera ignorée.
- Seules les explications claires et précises seront prises en compte lors de la correction.
- La solution à une question sera spécifiée avec soin dans l'espace qui lui est réservé quand cela est demandé.
- Le détail de ce chaque question sera, quant à lui, rédigé sur une copie classique.

Nom	Prénom	Signature	Note

Exercice 1 (Intégrales doubles)

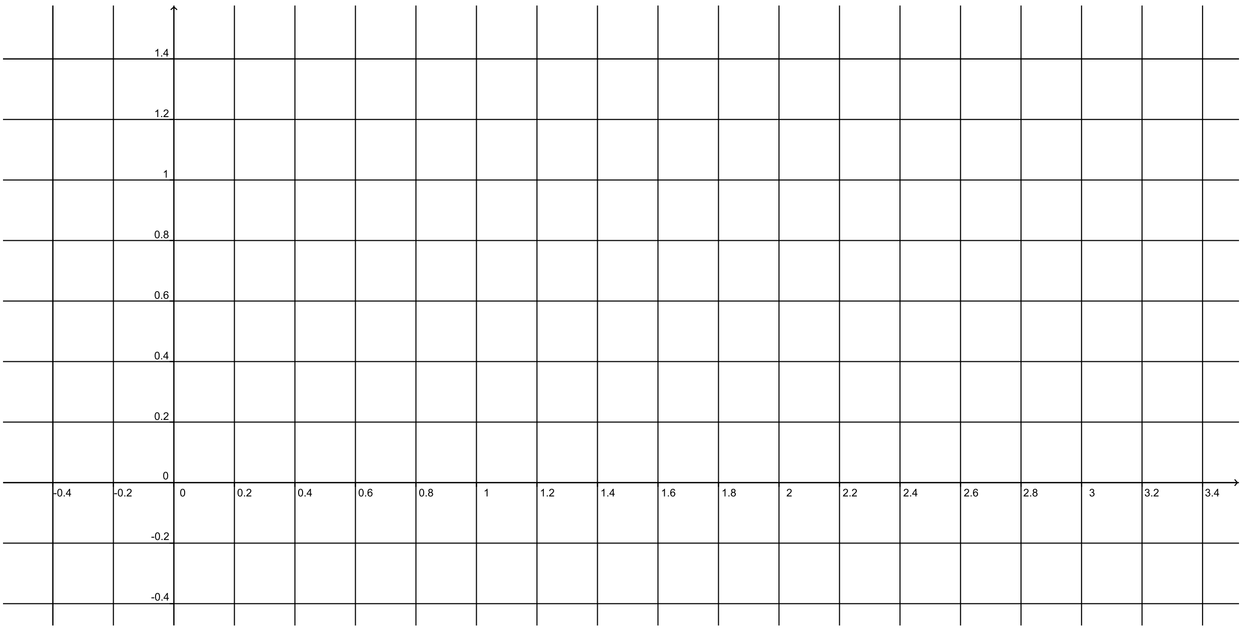
On considère P une plaque mince homogène dont l'épaisseur est négligeable donnée par :

$$\mathrm{P} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x+1}\right\}$$

On suppose ici que $\rho(x, y)$ la densité surfacique de cette plaque est constante.

Remarque/Aide Pour la suite, on pourra noter que : $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{1+x}$

1. Représenter graphiquement la plaque P.



2. Soit S l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire. Calculer S.

S =

3. Soit G le centre de gravité de la plaque. Déterminer les coordonnés de G.

$x_{\mathrm{G}} \quad = \quad$	$y_{\mathrm{G}} \quad = \quad$ ....

Exercice 2 (Fonctions à plusieurs variables)

Soit la fonction $f(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = e^{y(1+x)}$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 données ci-dessous.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

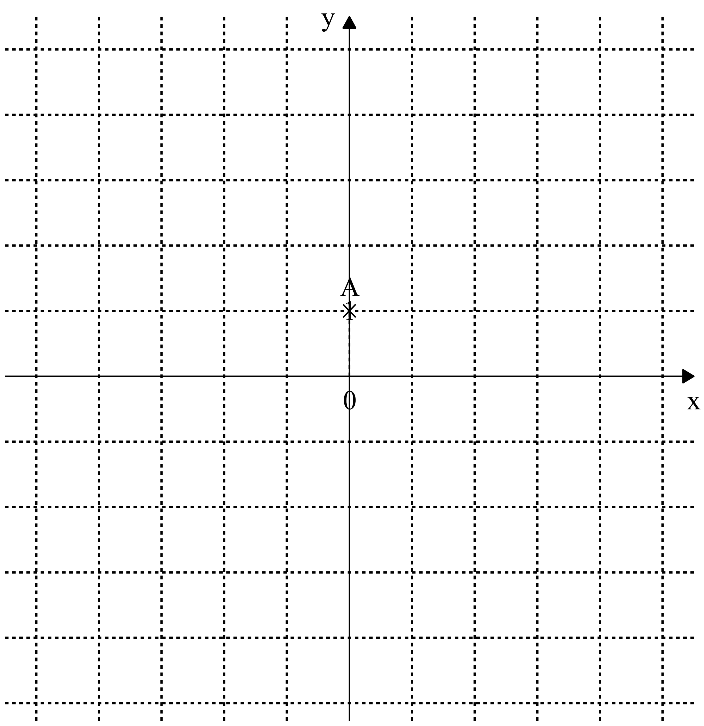
3. Que pouvez vous dire concernant $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$?

4. Déterminer son gradient en un point (x,y) quelconque.

$\nabla f(x,y) =$

5. Déterminer l'équation de la courbe de niveaux $k = e$.

6. Sur la figure ci-dessous dessiner la courbe de niveaux $k = e$ et le gradient au point A $= (0,1)$. Que remarquez vous ?



Exercice 3 (Diagonalisation)

Soit la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $P_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A.

   $P_A(\lambda) =$

2. Trouver les valeurs propres de A.

3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

4. Espaces propres.

   (a) Déterminer les espaces propres de A.

   (b) Déterminer une base propre B' de A.

   $B' =$

5. Conséquences

   (a) Donner D, la matrice diagonale.

   $D =$

   (b) Fournir la matrice de passage de B à B', notée P.

   $P =$

   (c) Calculer A^k.

   $A^k =$