

Automne 2022

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 4 points

1. $I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ est-elle convergente ?
2. $I_2 = \int_0^2 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$ est-elle convergente ?

Justifier soigneusement.

Exercice 2 - 8 points

Étudier la convergence des séries suivantes :

1. $S_1 = \sum \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$,
2. $S_2 = \sum \frac{n!}{2^n}$,
3. $S_3 = \sum \frac{n^n}{n!}$,
4. $S_4 = \sum \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)}$.

Justifier soigneusement.

Exercice 3 - 4 points

1. Résoudre $(E_1) y' + 3.x^2.y = x^2.e^{-x^3}$
2. Résoudre $(E_2) y'' + 2.y' + 2.y = 2.x^2 + 4.x + 4$.

Justifier soigneusement.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 4 - 4 points

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^3+x}$.

1) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

2) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .

Justifier soigneusement.

Exercice 5 - 2 points supplémentaires

Résoudre l'équation différentielle :

$$x \ln(x)y' - y = \ln(x).$$

Justifier soigneusement.