

# Automne 2023

*Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main*

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

## Exercice 1 - 2 points

*Les intégrales généralisées ci-dessous sont-elles convergentes ?*

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{e^x}{x^2} dx \text{ et } I_2 = \int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx.$$

**Justifier soigneusement.**

## Exercice 2 - 8 points

*Les séries numériques suivantes sont-elles convergentes ?*

- 1)  $\sum u_n$  avec  $u_n = \frac{(2n)!}{n^{2^n}}$ .
- 2)  $\sum v_n$  avec  $v_n = n^2 \cdot (\sin(\frac{1}{n}))^n$ .
- 3)  $\sum w_n$  avec  $w_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n^2}$ .
- 4)  $\sum x_n$  avec  $x_n = (-1)^n \sin(\frac{\sqrt{n+1}}{n})$ .

**Justifier soigneusement.**

*RAPPEL :  $\exp(1) \simeq 2.71828182846$ .*

TOURNER LA PAGE SVP

**Exercice 3 - 6 points**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) **Equation différentielle du premier ordre à variables séparées :**

$$(E_1) \quad y' = \frac{1}{2xy}$$

avec  $x > 0$  et  $y > 0$ .

Déterminer les intervalles de définition des solutions.

2) **Equation différentielle linéaire du premier ordre :**

$$(E_2) \quad xy' + y = e^x.$$

Déterminer les intervalles de définition des solutions.

3) **Equation différentielle linéaire du second ordre :**

$$(E_3) \quad y'' - y = 1 - x^2.$$

Déterminer les intervalles de définition des solutions.

**Justifier soigneusement.**

**Exercice 4 - 4 points**

1. Comparer les convergences simples et uniformes des **suites de fonctions** définies par

$$f_n(x) = \frac{n \cdot x + 1}{n} + \sin\left(\frac{x}{n}\right) \text{ et } g_n(x) = \frac{n \cdot x + 1}{n} + \frac{\sin(x)}{n}.$$

2. La série de fonctions  $\sum \frac{x}{n^3+x}$  est-elle uniformément convergente sur  $[0, 10]$  ?

**Justifier soigneusement.**