le 10 Janvier 2025

UTBM MT3A

Automne 2024

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *3 points*

Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$ *et* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}.(1+\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}})dx$.

Que peut-on en déduire sur l'étude d'une intégrale généralisée et l'équivalence ?

Justifier soigneusement.

Exercice 2 - *6 points*

Étudier la convergence des séries suivantes :

1. $S_1 = \sum (\frac{n}{n^2+1})^n$,
2. $S_2 = \sum \frac{n!}{2^n}$,
3. $S_3 = \sum \frac{n^n}{n!}$,
4. $S_4 = \sum \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)}$.

Justifier soigneusement.

Exercice 3 - *3 points*

Pour $a \in \mathbb{R}$, *soit* f_a *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par :*

$$f_a(x,y,z) = (x+3.y+a.z, 2.x-y+z, -x+y).$$

Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ *tels que* f_a *soit bijective.*

Justifier soigneusement.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 4 - *8 points*

Soient les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par* $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, $w_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & u_n & - & 2v_n & + & 2w_n \\ v_{n+1} & = & & - & v_n & + & 2w_n \\ w_{n+1} & = & & & & & w_n \end{array}\right.$$

1. *Déterminer la matrice* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

2. *Déterminer les valeurs propres de* A *et leur multiplicité.*

3. *Déterminer les vecteurs propres de* A*, une matrice de passage* P *et une matrice diagonale* $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A = P.D.P^{-1}$

4. *exprimer* A^2, A^3 *en fonction de* P *et* D*. En déduire, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, A^n *en fonction de* P, D *et* n.

5. *En déduire* u_n, v_n *et* w_n *en fonction de* n.

Justifier soigneusement.