le 2 Janvier 2026

UTBM MT3A

# Automne 2025

*Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est* **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

**Exercice 1** - *4 points*

1. $I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{\sin(x).\ln(x)}{x^3}\mathrm{dx}$ *est-elle convergente ?*
2. $I_2 = \int_0^2 \frac{1}{x.(e^x-1)}.\mathrm{dx}$ *est-elle convergente ?*

*Justifier soigneusement.*

**Exercice 2** - *6 points*

*Étudier la convergence des séries suivantes :*

1. $S_1 = \sum \frac{n!}{2^n}$,
2. $S_2 = \sum \frac{n^n}{n!}$,
3. $S_3 = \sum \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)}$.

*Justifier soigneusement.*

**Exercice 3** - *3 points*

*Etudier suivant* $a, b, c, d \in \mathbb{R}_*^+$, $\sum (\frac{an+b}{cn+d})^n$.

*Justifier soigneusement.*

TOURNER LA PAGE SVP

**Exercice 4** - *7 points*

*Soit* $f$ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par* $f((x,y,z)) = (-x-3y+3z, -2x-y+2z, -2x-3y+4z)$.

*1) Quelle est la matrice* $A$ *de* $f$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$

*2) Déterminer le polynôme caractéristique de* $f$ *et ses valeurs propres avec leur multiplicité.*

*3) Déterminer une base de vecteurs propres de* $f$ *des espaces propres associés aux valeurs propres ci-dessus.*

*4) Déterminer* $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *et* $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que* $A = P.D.P^{-1}$ *où* $D$ *est une matrice diagonale.*

*5) Calculer* $P^{-1}$.

*6) En déduire* $A^n$ $(n \in \mathbb{N})$ *en fonction de* $n$.

*7) Déduire de ce qui précède* $f^8((1,2,3))$ *où* $f^k$ *désigne la composée* $f \circ f \circ ... \circ f$ *(*$k$ *fois).*

*Justifier soigneusement.*