le 22 Juin 2023

UTBM MT3B

Examen printemps 2023

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *6 points*

1) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites numériques réelles.

Les sous-ensemble suivants de E sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ? (expliquer rapidement pourquoi)

a) L'ensemble des suites croissantes.

b) L'ensemble des suites monotones.

c) L'ensemble des suite majorées.

d) L'ensemble des suites bornées.

2) Pour quels $x \in \mathbb{R}$, $B = ((1, -1, x), (x, 1, 1), (1, 1, 0))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

3) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, une base de E. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $f_a \in End(E)$ par $f_a(e_1) = 0$ et $f_a(e_2) = f_a(e_3) = e_2 - a.e_3$.

a) Déterminer une base de $Ker(f_a)$ et $Im(f_a)$.

b) A quelle condition sur a, $Ker(f_a)$ et $Im(f_a)$ sont-ils supplémentaires ?

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 2

Première partie - 7 points

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f((x,y,z)) = (-y, -y, x-y-z)$.

1) Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

2) Déterminer le polynôme caractéristique de f et ses valeurs propres avec leur multiplicité.

3) Déterminer une base de vecteurs propres de f des espaces propres associés aux valeurs propres ci-dessus.

4) Déterminer $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P.D.P^{-1}$ où D est une matrice diagonale.

5) Calculer P^{-1}.

6) En déduire A^n ($n \in \mathbb{N}$) en fonction de n.

7) Déduire de ce qui précède $f^{22}((1,2,3))$ où f^k désigne la composée $f \circ f \circ ... \circ f$ (k fois).

Deuxième partie - 7 points

Soit la base $B = ((1,0,1),(0,0,1),(1,1,0))$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Orthonormalisez cette base grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.

2) Quelle est la matrice T de f dans la base orthonormalisée obtenue ci-dessus ?

3) Déterminer une expression en fonction de n de T^n ?