Examen printemps 2024

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *4 points*

1) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynôme à une indéterminée et à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

Les sous-ensemble suivants de E sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ? **Si oui, donner leur dimension.**

a) $F_1 = \{P(X) \in E, P"(X) = 0\}$.

b) $F_2 = \{P(X) \in E, P"(X) = X\}$.

c) $F_3 = \{P(X) \in E, 2.P(X) - X.P'(X) = 0\}$.

d) $F_4 = \{2.P(X) - X.P'(X), P(X) \in E\}$.
Justifier soigneusement.

Exercice 2 - *4 points*

1. *Grâce à des opérations sur les lignes et colonnes, calculer le déterminant des matrices ci-dessous (pas de gros calculs !) :*

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Étudier, suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ ou $m \in \mathbb{R}$, l'inversibilité des matrices ci-dessus.*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *9 points*

Soit $\mathcal{C} = \{c_1 = (1,0,0), c_2 = (1,0,0), c_3 = (0,0,1)\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
Soit l'application linéaire donnée dans $\mathcal{C}$ *par*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y, 2y, -2x+2y+3z) \end{array}$$

1. *Déterminer la matrice de* f *dans la base* $\mathcal{C}$ *:*

$$A = \mathcal{M}_{f,\mathcal{C}}.$$

2. *Déterminer la polynôme caractéristique de* f *et ses valeurs propres.*
3. *Déterminer une base,* $\mathcal{B}$*, de* $\mathbb{R}^3$ *composée de vecteurs propres de* f.
4. *Déterminer la matrice de* f *dans* $\mathcal{B}$ *:*

$$D = M_{f,\mathcal{B}},$$

ainsi que la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ *:*

$$P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

5. *Déterminer l'inverse de* P, P^{-1}. *Que représente cette matrice ?*
6. *Vérifier que* $A = P.D.P^{-1}$.
7. *Calculer* D^2, D^3 *et trouver une expression de* D^n *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *en fonction de* n *(justifier).*
8. *En déduire une expression en fonction de* n *de* A^n.
(on commencera par exprimer A^n *en fonction de* P, D *et* n*, puis on remplacera)*
9. *Déterminer* $f^5(1,2,3)$ *où* $f^5 = f \circ f \circ f \circ f \circ f$.

Exercice 4 - *3 points*

Montrer que l'application ci-dessous définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$ *:*

$$\langle P(X), Q(X) \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$