le 17 Juin 2025

UTBM MT3B

Examen printemps 2025

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est **une feuille A4 recto-verso rédigée à la main**

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - *6 points*

I

a) Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_1)\ y' = -e^x.y^2.$$

b) Sur quels intervalles une solution est-elle définie ?

c) Quelle est la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Justifier soigneusement.

II - Résoudre l'équiation

$$(E_2) : y' - 2y = x.e^{2x}.$$

Sur quels intervalles une solution est-elle définie ?

Justifier soigneusement.

III - Résoudre l'équation.

Trouver toutes les solutions de

$$(E_3)\ y'' + 4y' + 4y = x.$$

Sur quels intervalles une solution est-elle définie ?

Justifier soigneusement.

Exercice 2 - *3 points*

Soit la série de fonction de $\sum nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1) Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[2, +\infty[$.

Justifier soigneusement.

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - *5 points*

Soit la fonction f, 2π-périodique égale à $x-\pi$ pour $0 < x < 2\pi$, et 0 pour $x = 2.k.\pi, k \in \mathbb{Z}$.

1. *Représenter cette fonction. Est-elle paire ou impaire, que peut-on en déduire ?*
2. *Développer en série de Fourier la fonction f.*
3. *La série obtenue converge-t-elle simplement vers f ?*
4. *La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $[0, 2\pi]$?*
5. *Déduire du développement de f, la valeur de $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.*

Justifier soigneusement.

Exercice 4 - *6 points.*

On considére l'équation différentielle suivante, là ou elle est définie :

$$(E) \quad x.y"(x) + 2.y'(x) + x.y(x) = 0.$$

1. *On pose $y(x) = \sum\limits_{n \geq o} a_n.x^n$.*

   Ecrire la relation de récurence vérifiée par a_n pour que y vérifie (E) (on distinguera les coefficient d'indice pair avec ceux d'indice impair).
2. *Déterminer la série entière solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$.*
3. *Ecrire explicitement (sous forme de fonctions usuelles) les solutions de (E) développables en série entiere.*

Justifier soigneusement.

RAPPEL :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = 1 * \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}.$$

DIRICHLET : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux, T périodique. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \; (= f(x) \textit{ si } f \textit{ continue en } x).$$

PARSEVAL : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, T périodique. Alors

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(x))^2 dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

où les a_n et b_n sont les coefficents de Fourier de f.