

Examen printemps 2026

Calculatrices interdites. Le seul document autorisé est une feuille A4 recto-verso rédigée à la main

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 - 6 points

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) **Equation différentielle du premier ordre à variables séparées :**

$$(E_1) \ y' \cdot (1 + x^2) = 4 \cdot x \cdot \sqrt{y}.$$

Justifier soigneusement.

2) **Equation différentielle linéaire du premier ordre :**

$$(E_2) \ xy' - 2y = -\frac{3}{x}$$

Justifier soigneusement.

3) **Equation différentielle linéaire du second ordre :**

$$(E_3) \ y'' + 3y' + 2y = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4.$$

Justifier soigneusement.

Exercice 2 - 3 points

Soit la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}.$$

1) *Déterminer la limite de cette suite sur $[0, 1]$. Justifier soigneusement.*

2) *La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? Justifier soigneusement.*

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3 - 6 points

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction impaire, 2π périodique, qui vaut 1 sur $]0, \pi[$, et telle que $\forall k \in \mathbb{Z}, f(k.\pi) = 0$.

1. Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer son développement en série de Fourier $\widehat{f}(x)$. **Justifier soigneusement.**
3. $\widehat{f}$ converge-t-elle simplement et uniformément vers f ? **Justifier soigneusement.**
4. En déduire, en justifiant soigneusement, la valeur de :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Exercice 4 - 5 points

1. Factoriser le polynôme $P(n) = n^2 + 3n + 2$.
2. Chercher la fonction développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot x^n$, solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2 \cdot y'' + 4x \cdot y' + 2 \cdot y = e^x.$$

Justifier soigneusement.

3. Donner une forme explicite de cette solution pour $x \neq 0$. **Justifier soigneusement.**
(On pourra multiplier l'expression trouvée par x^2)

RAPPEL :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = 1 * \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}.$$

DIRICHLET : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux, T périodique. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad (= f(x) \text{ si } f \text{ continue en } x).$$

PARSEVAL : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, T périodique. Alors

$$\frac{1}{T} \int_0^T (f(x))^2 dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

où les a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f .