Final MT3F - Corrigé

Exercice 1.

1. (a) Un calcul direct donne

$$A^2-3A=\begin{pmatrix}-5&3&3\\-12&7&6\\-6&3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&3&3\\-12&9&6\\-6&3&6\end{pmatrix}=-2I_3.$$

On en déduit que $A^2-3A+2I_3=0_3$, donc le polynôme $Q(X)=X^2-3X+2$ est annulateur de A.

(b) Les valeurs propres **possibles** de A sont les racines de $Q(X)$, c'est-à-dire 1 et 2 (racines évidentes).

2. (a) $AU_1=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}=2U_1$, donc U_1 est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 2. Dans la suite, on note $E_2(A)$ le sous-espace propre associé.

(b) $A-I_3=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-4&2&2\\-2&1&1\end{pmatrix}$. En échelonnant cette matrice, on obtient :

$$\mathrm{rg}(A-I_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-2&0&0\\-4&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}=1.$$

Ainsi, $A-I_3$ n'est pas inversible, donc 1 est une valeur propre de A. Déterminons $E_1(A)$, le sous-espace propre associé.

Soit $U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$U\in E_1(A)\Leftrightarrow(A-I_3)U=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+y+z=0\\-4x+2y+2z=0\\-2x+y+z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2x+y+z=0\Leftrightarrow z=2x-y\Leftrightarrow U=\begin{pmatrix}x\\y\\2x-y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Donc $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

3. D'après les questions 2.(a) et 2.(b), A a deux valeurs propres, 1 et 2. De plus, A est de taille 3, et $\dim E_1(A)+\dim E_2(A)=2+1=3$. On en déduit que A est diagonalisable. On peut écrire $A=PDP^{-1}$, avec $D=\mathrm{diag}(1,1,2)$ et $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&-1&1\end{pmatrix}$.

4. (a) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$. Alors le système différentiel (S) est équivalent à $X'(t)=AX(t)$.

(b) D'après les questions précédentes, la matrice A est diagonalisable, et la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A. La solution générale de (S) s'écrit donc :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.

Autrement dit,

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_3 e^{2t} \\ y(t) = C_2 e^t + 2C_3 e^{2t} \\ z(t) = 2C_1 e^t - C_2 e^t + C_3 e^{2t} \end{cases},\ (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 2. Dans cet exercice, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Soit $v = (x, y, z, t) \in E$. Alors

$$v \in F^\perp \Leftrightarrow \langle u_1, v\rangle = \langle u_2, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+2z+3t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+z+2t=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-z-2t \end{cases} \quad \Leftrightarrow v=(t,-z-2t,z,t)$$

On en déduit que $F^\perp = \mathrm{Vect}((1,-2,0,1)\,,\,(0,-1,1,0))$.

2. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Commençons par construire une base orthogonale de F : on pose

$$\varepsilon_1 = u_1 = (1,1,1,1), \quad \varepsilon_1 = u_2 - \lambda\varepsilon_1,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle = 0$. Cette égalité est équivalente à $\lambda = \dfrac{\langle u_2, \varepsilon_1\rangle}{\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle} = \dfrac{8}{4} = 2$. Ainsi, $\varepsilon_2 = (-1,0,0,1)$.

On obtient une base orthonormée (f_1, f_2) de F en posant

$$f_1 = \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad f_2 = \frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1).$$

3. (a) Comme $E = F \oplus F^\perp$, la juxtaposition d'une base de F et d'une base de $F^\perp$ fournit une base de E. Ainsi, $\mathfrak{B}' = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ est une base de E.

   (b) Rappelons que p_F, projection orthogonale sur F, est la projection sur F, parallèlement à $F^\perp$. Ainsi, comme f_1 et f_2 appartiennent à F, on a $p_F(f_1) = f_1$ et $p_F(f_2) = f_2$. De plus, comme g_1 et g_2 appartiennent à $F^\perp$, on a $p_F(g_1) = p_F(g_2) = 0_E$. La matrice de p_F dans la base $\mathfrak{B}' = (f_1, f_2, g_1, g_2)$ est donc donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}'}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Pour obtenir la matrice A de p_F dans la base canonique $\mathfrak{B}$, on va calculer les images par p_F de chacun des vecteurs de $\mathfrak{B}$.

   Comme (f_1, f_2) est une base orthonormée de F, d'après le théorème de la projection,

$$\begin{aligned} p_F(e_1) &= \langle e_1, f_1\rangle f_1 + \langle e_1, f_2\rangle f_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(1,1,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1) \\ &= \frac{1}{4}(3,1,1,-1). \end{aligned}$$

   De même, on obtient

$$p_F(e_2) = p_F(e_3) = \frac{1}{4}(1,1,1,1), \quad p_F(e_4) = \frac{1}{4}(-1,1,1,3).$$

   Ainsi, la matrice A de p_F dans la base canonique est donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathfrak{B}}(p_F) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. La distance de w à F est donnée par

$$\mathrm{d}(w, F) = \|w - p_F(w)\|.$$

   On obtient le projeté orthogonal de w sur F à l'aide par exemple du produit matriciel Aw, ainsi $p_F(w) = (2,2,2,2)$. Finalement,

$$d_F(w) = \|(2,1,3,2) - (2,2,2,2)\| = \|(0,-1,1,0)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Exercice 3.

1. (a) Pour tout entier $n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant \ln 3 \geqslant \ln e = 1 > 0$, donc $\dfrac{\ln n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n} > 0$. Or la série $\sum_{n\geqslant 3} \dfrac{1}{n}$ est divergente (c'est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$). D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 3} \dfrac{\ln n}{n}$ est divergente.

   Remarque : On peut également utiliser le critère de Riemann.

   (b) La série $\sum_{n\geqslant 3} \dfrac{\ln n}{n}$ est divergente et à termes positifs, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$.

2. On reconnait une forme $u' \times u$, avec $u : t \mapsto \ln t$. Ainsi,

$$\int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_3^n = \frac{1}{2}\left(\ln^2(n) - \ln^2(3)\right).$$

3. (a) Soit un entier $k \geqslant 3$. Comme f est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1] \subset [3, +\infty[$, on a, pour tout $t \in [k, k+1]$, l'inégalité

$$f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k).$$

   En intégrant cet encadrement entre k et $k+1$, on obtient, par croissance de l'intégrale :

$$f(k+1)\int_k^{k+1} \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)\int_k^{k+1} \mathrm{d}t,$$

   soit $f(k+1)(k+1-k) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)(k+1-k)$, d'où l'inégalité demandée.

   (b) Soit $n \geqslant 4$ un entier. En utilisant successivement la partie droite de l'encadrement précédent et la relation de Chasles pour les intégrales, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=3}^{n-1} f(k) + f(n) \\ &\geqslant \sum_{k=3}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) = \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln^2 n - \ln^2 3\right) + \frac{\ln n}{n}. \end{aligned}$$

   De même, en utilisant la partie gauche, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= f(3) + \sum_{k=4}^{n} f(k) = f(3) + \sum_{l=3}^{n-1} f(l+1) \leqslant f(3) + \sum_{l=3}^{n-1}\int_l^{l+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln 3}{3} + \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2}\left(\ln^2 n - \ln^2 3\right). \end{aligned}$$

   D'où l'encadrement demandé.

4. Soit $n \geqslant 3$. En divisant l'encadrement $(\star)$ par $\ln^2 n > 0$, on obtient

$$\frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln^2 3}{\ln^2 n}\right) \leqslant \frac{S_n}{\ln^2 n} \leqslant \frac{\ln 3}{3\ln^2 n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln^2 3}{\ln^2 n}\right).$$

   Les deux bornes de ce dernier encadrement tendent vers $\dfrac{1}{2}$. On en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln^2 n} = \dfrac{1}{2}$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\frac{1}{2}\ln^2 n} = 1$. On a donc l'équivalent : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\ln^2 n$.