Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 6 & -8 & 2 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

1. (a) On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 4-X & -6 & 2 \\ 6 & -8-X & 2 \\ 6 & -6 & -X \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} -X & -6 & 2 \\ -X & -8-X & 2 \\ -X & -6 & -X \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} -X & -6 & 2 \\ 0 & -X-2 & 0 \\ 0 & 0 & -X-2 \end{vmatrix} && \text{dét. d'une matrice triangulaire} \\
&= -X(-X-2)(-X-2) \\
&= -X(X+2)^2
\end{aligned}$$

Donc A admet deux valeurs propres réelles : zéro de multiplicité 1 et -2 de multiplicité 2.

(b) $$A\,U_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 6 & -8 & 2 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6+2 \\ 6-8+2 \\ 6-6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que U_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0. Comme 0 est de multiplicité 1, le sous-espace propre associé à 0, qui est aussi le noyau de A, est de dimension 1 :

$$E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(U_1)$$

(c) On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
U \in E_{-2}(A) &\iff AU = -2U && \iff \begin{cases} 4x - 6y + 2z &= -2x \\ 6x - 8y + 2z &= -2y \\ 6x - 6y &= -2z \end{cases} \\
&\iff 6x - 6y + 2z = 0 && \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -3x + 3y \end{cases} \\
&\iff U = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En posant $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, on voit que $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}(U_1, U_2)$ est de dimension 2.

2. La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à l'ordre de A. On en déduit que A est diagonalisable.

   En posant $D = \mathrm{diag}(-2, -2, 0)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, nous avons $A = P\,D\,P^{-1}$

3. Pour toute matrice M appartenant à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $N = P^{-1} M\,P$.

   (a) On utilise l'associativité du produit matriciel.

$$\begin{aligned}
& M \in \mathcal{C}(A) \iff AM = MA \iff (P\,D\,P^{-1})M = M(P\,D\,P^{-1}) \\
& \Leftrightarrow P\,D\,P^{-1}\,M = M\,P\,D\,P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}(P\,D\,P^{-1}\,M) = P^{-1}(M\,P\,D\,P^{-1}) \\
& \Leftrightarrow (\underbrace{P^{-1}P}_{I_3})(D\,P^{-1}\,M) = (\underbrace{P^{-1}\,M\,P}_{N})D\,P^{-1} \iff D\,P^{-1}\,M = N\,D\,P^{-1} \\
& \Leftrightarrow (D\,P^{-1}\,M)P = (N\,D\,P^{-1})P \iff D(\underbrace{P^{-1}\,M\,P}_{N}) = (N\,D)(\underbrace{P\,P^{-1}}_{I_3}) \\
& \iff D\,N = N\,D \iff N \in \mathcal{C}(D)
\end{aligned}$$

   (b) • $D\,N = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ -2d & -2e & -2f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   • $N\,D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -2b & 0 \\ -2d & -2e & 0 \\ -2g & -2h & 0 \end{pmatrix}$

• $N \in \mathcal{C}(D) \Leftrightarrow DN = ND \iff \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ -2d & -2e & -2f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -2b & 0 \\ -2d & -2e & 0 \\ -2g & -2h & 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2c & = & 0 \\ -2f & = & 0 \\ -2g & = & 0 \\ -2h & = & 0 \end{array} \right. \iff c = f = g = h = 0$$

$$\iff N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \iff N = a\,E_{1,1} + b\,E_{1,2} + d\,E_{2,1} + e\,E_{2,2} + k\,E_{3,3}$$

$$\iff N \in \mathrm{Vect}(E_{1,1}\,,\,E_{1,2}\,,\,E_{2,1}\,,\,E_{2,2}\,,\,E_{3,3})$$

• La famille $(E_{1,1}\,,\,E_{1,2}\,,\,E_{2,1}\,,\,E_{2,2}\,,\,E_{3,3})$ engendre $\mathcal{C}(D)$. En tant que sous-famille de la base canonique de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, cette famille est également libre.
Ainsi $\boxed{(E_{1,1}\,,\,E_{1,2}\,,\,E_{2,1}\,,\,E_{2,2}\,,\,E_{3,3}) \text{ est une base de } \mathcal{C}(D)}$.

(c) Considérons l'application $f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A) & \longrightarrow & \mathcal{C}(D) \\ M & \longmapsto & P^{-1}M\,P \end{array}$

- Cette application f est à valeurs dans $\mathcal{C}(D)$ d'après la question 3.(a)
- f est linéaire car pour toutes matrices M et M' appartenant à $\mathcal{C}(A)$ et pour tout nombre réel λ,

$$f(\lambda\,M + M') = P^{-1}(\lambda\,M + M')P = P^{-1}(\lambda M P + M'\,P)$$
$$= \lambda\,P^{-1}M\,P + P^{-1}M'\,P = \lambda f(M) + f(M')$$

- f est injective, en effet : si $M \in \mathrm{Ker} f$ alors $P^{-1}M\,P = \mathbb{O}_3$
d'où $M\,P = P\,\mathbb{O}_3 = \mathbb{O}_3$ donc $M = \mathbb{O}_3\,P^{-1} = \mathbb{O}_3$
- f est surjective, en effet : soit $N \in \mathcal{C}(D)$. Posons $M = P\,N\,P^{-1}$.
Alors $N = P^{-1}M\,P$ et $M \in \mathcal{C}(A)$ car $N \in \mathcal{C}(D)$.
On a donc trouvé $M \in \mathcal{C}(A)$ telle que $N = f(M)$.

Par conséquent f est un isomorphisme de $\mathcal{C}(A)$ sur $\mathcal{C}(D)$
et f^{-1} est un isomorphisme de $\mathcal{C}(D)$ sur $\mathcal{C}(A)$.
En particulier la famille

$$\big(f^{-1}(E_{1,1})\,,\,f^{-1}(E_{1,2})\,,\,f^{-1}(E_{2,1})\,,\,f^{-1}(E_{2,2})\,,\,f^{-1}(E_{3,3})\big)$$

est une base de $\mathcal{C}(A)$.

Finalement $\boxed{\dim\big(\mathcal{C}(A)\big) = 5}$.

Exercice 2

1. Pour tout $n \in N$, on a : $u_{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{\geqslant 1} u_n \geqslant u_n$. Ceci prouve la croissance de la suite (u_n).

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, en utilisant l'inégalité admise :
$$0 \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$
La série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$), donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ converge.

Remarque : on peut aussi utiliser l'équivalent $\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$. D'après la question précédente, la suite (S_n) converge, en tant que suite des sommes partielles d'une série convergente. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{S_n}$. Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right).\end{aligned}$$

(b) En utilisant l'inégalité admise, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité prouvée à la question précédente permet d'écrire, en utilisant la croissance de la fonction exponentielle :
$$\frac{\ell}{u_n} \leqslant \mathrm{e}^{1/2^n}.$$
Les deux membres de cette inégalité étant strictement positifs, un passage à l'inverse donne :
$$\frac{u_n}{\ell} \geqslant \mathrm{e}^{-1/2^n},$$
soit, en multipliant les deux membres par $\ell > 0$, on obtient :
$$u_n \geqslant \ell \mathrm{e}^{-1/2^n}.$$

4. (a) La suite (u_n) étant croissante et convergente de limite ℓ, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$, soit $\ell - u_n \geqslant 0$.
De plus, l'inégalité démontrée à la question 3. (c) donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\ell - u_n \leqslant \ell - \ell \mathrm{e}^{-1/2^n} = \ell(1-\mathrm{e}^{-1/2^n}).$$
L'encadrement demandé en découle.

(b) Remarquons d'abord que
$$\ell(1-\mathrm{e}^{-1/2^n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{2^n}.$$
La série $\sum \frac{\ell}{2^n}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$). D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum \ell(1-\mathrm{e}^{-1/2^n})$ converge.
L'encadrement prouvé à la question 4. (a) entraîne, avec le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, que la série $\sum(\ell - u_n)$ est convergente.

Exercice 3

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, $t^2 \times t^n e^{-t} = \dfrac{t^{n+2}}{\mathrm{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. D'après le critère de Riemann, l'intégrale I_n est convergente.

   (b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

   Initialisation : $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^0 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A$ $= \displaystyle\lim_{A\to+\infty} (1-\mathrm{e}^{-A}) = 1 = 0!$.

   La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

   Soit $A > 0$. Effectuons une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Posons $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$. Alors $u'(t) = (n+1)t^n$ et $v(t) = -e^{-t}$ (par exemple).

   Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t &= \left[-t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= -A^{n+1}\mathrm{e}^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

   En faisant tendre A vers $+\infty$ dans cette égalité et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n! = (n+1)!$. La propriété est donc héréditaire.

   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

2. Soit $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   - **Symétrie :** $\varphi(Q, P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} Q(t)P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \varphi(P, Q)$.
   - **Bilinéarité :**

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q, R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda P(t)R(t)\mathrm{e}^{-t} + Q(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_0^{+\infty} P(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \lambda\varphi(P, R) + \varphi(Q, R).\end{aligned}$$

     φ est donc linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite, donc bilinéaire.

   - **Positivité :** $\varphi(P, P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \geqslant 0$, par positivité de la fonction $t \mapsto P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ sur $[0, +\infty[$.
   - **Caractère défini :** supposons que $\varphi(P, P) = 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0$. La fonction $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$. D'après le théorème de stricte positivité, on en déduit que, pour tout $t \geqslant 0$, $P^2(t)e^{-t} = 0$, donc $P^2(t) = 0$, soit $P(t) = 0$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, ainsi $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

   φ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. (a) $\mathcal{B}$ est une famille libre (car orthonormée) à 3 éléments dans $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3. $\mathcal{B}$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) $\mathcal{B}$ étant une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$, d'après le théorème de la projection orthogonale :

$$\begin{aligned}p_F(X^3) &= \sum_{i=0}^{2} \varphi(L_i, X^3)L_i \\ &= \varphi(1, X^3) + \varphi(1-X, X^3)L_1 + \frac{1}{2}\varphi(X^2 - 4X + 2, X^3)L_2 \\ &= I_3 + (I_3 - I_4)L_1 + \frac{1}{2}(I_5 - 4I_4 + 2I_3)L_2 = 6 - 18L_1 + 18L_2 \\ &= 9X^2 - 18X + 6.\end{aligned}$$

4. (H) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Rappelons que l'ensemble des solutions de (H) sur $I =]0, +\infty[$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2. Les fonctions L_1 et g sont deux solutions de (H) qui sont linéairement indépendantes (en effet, si elles sont liées, si l'une s'annule en un point donné, l'autre également, contradiction avec le fait que $L_1(1) = 0$ et $g(1) = -e$). Ainsi, l'ensemble des solutions de (H) est l'ensemble des fonctions de la forme

$$y : t \mapsto \lambda L_1(t) + \mu g(t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$