Final MT3F

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Les 3 exercices seront rendus sur 3 copies différentes.

Exercice 1 (7 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 6 & -8 & 2 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

1. (a) Déterminer les valeurs propres de A.

   (b) Calculer AU_1, où $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?

   (c) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre strictement négative de A.

2. En déduire que A est diagonalisable. Proposer une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P\,D\,P^{-1}$. *Pour la matrice D, on rangera les coefficients diagonaux par ordre croissant. De plus, on ne calculera pas P^{-1}.*

3. On s'intéresse au **commutant** de A, c'est-à-dire l'ensemble noté $\mathcal{C}(A)$ des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Autrement dit : $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$. On admet que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

   Pour toute matrice M appartenant à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $N = P^{-1} M\,P$.

   (a) Prouver l'équivalence : $M \in \mathcal{C}(A) \iff N \in \mathcal{C}(D)$.

   (b) On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$. Calculer $D\,N$ et $N\,D$. En déduire une base de $\mathcal{C}(D)$.

   Pour tous entiers i et j appartenant à $\{1, 2, 3\}$, on notera $E_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la $i-$ème ligne et de la $j-$ème colonne, qui est égal à 1. Par exemple $E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(A)$.

Changez de copie.

Exercice 2 (7 points)

Dans cet exercice, on pourra utiliser librement l'inégalité suivante : $\forall\, x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

1. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
2. (a) Montrer que la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   On note ℓ la limite de (u_n). On admet que $\ell > 0$, et que $\ln(\ell) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.
3. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (b) Démontrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell \mathrm{e}^{-1/2^n}$.
4. (a) Déduire des questions précédentes l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1-\mathrm{e}^{-1/2^n}\right).$$

   (b) Étudier la convergence de la série $\sum(\ell - u_n)$.

Changez de copie.

Exercice 3 (7 points)

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   Cette intégrale sera notée I_n dans la suite de l'exercice.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

   Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   La question précédente permet de montrer que l'intégrale définissant φ est convergente, ce que l'on ne demande pas de justifier.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Dans cette question, on pose

$$L_0 = 1, \qquad L_1 = -X+1, \qquad L_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)$$

   (a) On admet que $\mathcal{B} = (L_0, L_1, L_2)$ est une famille orthonormale. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Calculer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
4. On considère **l'équation différentielle de Laguerre**, sur $I =]0, +\infty[$:

$$(H) : ty'' + (1-t)y' + y = 0.$$

   On admet que les fonctions $L_1 : t \mapsto L_1(t)$ et $g : t \mapsto (t-1)F(t) - \mathrm{e}^t$ (où F est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{t}$ sur I) sont solutions de (H) sur I.
   Donner l'ensemble des solutions de (H) sur I.