Final MT3F

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.

Les 3 exercices seront rendus sur 3 copies différentes.

Exercice 1 (7 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
3. (a) Justifier que le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A, associé à une valeur propre à préciser.
   (b) Déterminer une base des sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres 1 et 3.
   (c) Donner une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. On ne demande pas de calculer P^{-1}.
4. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'''(t) - 3y''(t) - y'(t) + 3y(t) = 0,$$

   où la fonction inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est trois fois dérivable.
   (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$. Exprimer $X'(t)$ en fonction de $X(t)$ et de A.
   (b) En déduire l'expression du vecteur $X(t)$, puis la résolution de l'équation (E).
   (c) L'équation (E) admet-elle des solutions non nulles ayant une limite finie en $+\infty$?

Pensez à changer de copie.

Exercice 2 (7 points)

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, et $F = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X)$.

1. Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.
2. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que φ est un produit scalaire sur E (on admet que l'intégrale généralisée définissant φ est convergente).
   On notera désormais $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$, et $\|P\| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$.

3. Soit $Q(X) = aX + b$ un polynôme de F où a et b sont des réels. Donner sous forme d'intégrale, l'expression de $\|X^2 - Q\|^2$.

   Le but de la suite de l'exercice est de montrer l'existence et de calculer la valeur de
$$\Delta = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

4. (a) Quel est l'unique polynôme $Q_0 \in F$ qui rend la quantité $\|X^2 - Q\|^2$ minimale ?
   (b) Donner sans calcul la valeur de $\langle X^2 - Q_0, 1\rangle$ et de $\langle X^2 - Q_0, X\rangle$. Expliquer brièvement.
   (c) En notant $Q_0 = \alpha X + \beta$, montrer que les réels α et β sont solutions du système $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = 6 \end{cases}$.
   (d) En déduire Q_0, puis déterminer la valeur de Δ.

Pensez à changer de copie.

Exercice 3 (7 points)

Soit $a > 0$. On considère l'intégrale $I_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$.

1. On admet que l'intégrale I_1 converge, et que $I_1 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{a}t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^X \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ (où $X > 0$), justifier que l'intégrale I_a est convergente, et calculer sa valeur en fonction de a.
2. Montrer que la série $\sum \mathrm{e}^{-an^2}$ est convergente.

   On note $S_a = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-an^2}$ la somme de cette série. *On ne cherchera pas à calculer S_a.*
3. On admet que la fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-at^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{e}^{-a(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-ak^2}.$$
   (b) Donner alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de e^{-ak^2} par deux intégrales.
   (c) En sommant les inégalités précédentes, montrer que $I_a \leqslant S_a \leqslant I_a + 1$.
4. (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{S_a}{I_a}$. En déduire un équivalent de S_a pour a au voisinage de 0.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{a\to 0} S_a$.

Fin