FINAL

La précision et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans l'attribution de la note. Le barème est donné à titre indicatif. Une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée pour l'épreuve. Les calculatrices sont interdites.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 Méthode de Halley (10 points)

Dans cette exercice nous allons vous présenter une méthode numérique de résolution approchée d'une équation, qui est dûe à l'astronome Edmund Halley (celui qui donna son nom à la comète). Considérons l'équation

$$(E) : f(x) = 0 \text{ où } x \in [a, b].$$

L'idée de la méthode de Halley est d'appliquer la méthode de Newton à la fonction

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}}.$$

1. Présentation de la méthode.

a. Soit $x_n \in [a, b]$. Écrire le développement de Taylor-Young de f en x_n à l'ordre 2.

b. On approxime alors f par la partie principale de ce développement (d'ordre 2), et on définit x_{n+1} comme l'abscisse du point où la courbe (approximée par Taylor) coupe l'axe des abscisses. Montrer que x_{n+1} vérifie l'équation :

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2.$$

c. En mettant $(x_{n+1} - x_n)$ en facteur dans l'expression précédente, montrer que

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)}.$$

d. La formule précédente n'est pas satisfaisante car la formule de calcul x_{n+1} fait intervenir x_{n+1} ! On va donc chercher à remplacer le x_{n+1} du membre de droite de l'équation par la meilleure approximation que l'on ait, à savoir celle obtenue à l'aide de la méthode de Newton. Montrer que dans ce cas, l'expression précédente s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2\left[f'(x_n)\right]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \qquad (*)$$

La formule $(*)$ est la formule d'itération de Halley (x_0 sera une valeur convenablement choisie).

2. Où l'on retrouve la formule d'itération.

a. Quelles hypothèses doit-on faire sur f pour que la méthode de Newton (appliquée à f) soit convergente ?

b. Montrer que la méthode de Halley revient en fait à appliquer la méthode de Newton à la fonction
$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}}.$$
Indication : on pourra supposer $f' > 0$.

3. Démonstration de la vitesse de convergence.
Dans cette question, nous allons supposer que la méthode est convergente, et calculer la vitesse de convergence.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, on suppose que f admet une racine α telle que $f'(\alpha) \neq 0$. Soit x_n un point dans le voisinage de α, alors le théorème de Taylor-Lagrange montre que :
$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(\alpha - x_n)^2 + \frac{f'''(\eta)}{6}(\alpha - x_n)^3 \tag{1}$$
et aussi
$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\theta)}{2}(\alpha - x_n)^2 \tag{2}$$
où η et θ sont des réels compris entre α et x_n.

a. Calculer $2f'(x_n) \times (1) - f''(x_n)(\alpha - x_n) \times (2)$ pour démontrer que
$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{2f'(x_n)f'''(\eta) - 3f''(x_n)f''(\theta)}{12f'(x_n)^2 - 6f''(x_n)f(x_n)}(\alpha - x_n)^3 \tag{3}$$
où x_{n+1} est le point défini par la relation $(*)$.

b. Déterminer la limite
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{2f'(x_n)f'''(\eta) - 3f''(x_n)f''(\theta)}{12f'(x_n)^2 - 6f''(x_n)f(x_n)}$$

c. En déduire l'ordre de cette méthode.

d. L'hypothèse que l'on a faite sur la convergence de la méthode vous parait-elle nécessaire ? Répondre en montrant que (x_n) converge si x_0 est proche de α.

4. Application numérique.
Dans cette question, on cherche à approximer $\sqrt{2}$ par la méthode de Halley. Pour cela, on considère une racine de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.

a. On se donne $x_0 = 1$. Écrire la formule d'itération de Halley (notée $(*)$ dans la question **1.**).

b. Que faut-il faire pour démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[1,2]$?

c. Montrer que
$$\left|\sqrt{2} - x_{n+1}\right| = \frac{1}{3x_n^2 + 2}\left|\sqrt{2} - x_n\right|^3.$$

d. En majorant la fonction $x \mapsto \frac{1}{3x^2+2}$ sur $[1,2]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left|\sqrt{2} - x_n\right| \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3^n-1}{2}}\left|\sqrt{2} - x_0\right|^{3^n}.$$

e. Combien faut-il calculer de termes pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-80} près ?

Exercice 2 Équations différentielles raides (10 points)

Le but de cet exercice est de présenter un type d'équation différentielle pour lequel la méthode d'Euler vue en cours (méthode explicite) fournit des résultats peu satisfaisants. On introduit alors une nouvelle version de la méthode d'Euler (méthode implicite) dont les résultats sont plus convainquants. Dans l'exercice on étudie le problème de Cauchy suivant :

$$(C) \begin{cases} y' = -\dfrac{1}{\epsilon} y \text{ avec } \epsilon > 0, t \in [0, +\infty[\\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Pour un pas $h > 0$ fixé, on considère $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \ldots$ une subdivision de $[0, +\infty[$ où $t_n = nh$. Une méthode numérique pour résoudre (C), sera une suite (y_n) où y_n est une valeur approchée de $y(t_n)$.

1. Solution exacte

a. Résoudre de manière exacte le problème différentiel (C).

b. Déduire de l'expression de y que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

c. On dira qu'une méthode numérique (y_n) pour résoudre (C) est A-stable si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$. Pourquoi la condition de A-stabilité est-elle nécessaire pour que la suite des itérés (y_n) donne des valeurs y_n proches des valeurs $y(t_n)$?

2. Euler explicite

a. Déterminer la suite des itérés (y_n) pour le schéma d'Euler pour le problème (C).

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = (1 - \dfrac{h}{\epsilon})^n$.

c. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ si et seulement si $|1 - \dfrac{h}{\epsilon}| < 1$.

d. En déduire que la méthode d'Euler explicite est A-stable pour (C) si et seulement si $h < 2\epsilon$. Cette restriction vous parait-elle raisonnable lorsque ϵ est très petit ($\epsilon << 1$) ? Commenter.

3. Euler implicite

On considère le schéma d'Euler implicite[1] dont la définition est :

$$\begin{cases} y_1 = y(0) \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases} \quad \text{(Euler implicite)}$$

a. Écrire la définition de la suite des itérés (y_n) calculés par le schéma d'Euler implicite pour résoudre (C).

b. En déduire que $y_n = (1 + \dfrac{h}{\epsilon})^{-n}$.

c. Montrer que cette fois-ci la méthode est A-stable quelque soit h.

4. Sur le calcul de y_{n+1} dans le schéma d'Euler implicite.

Dans cette question on s'intéresse à la situation générale suivante

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

[1] Ce schéma est appelé implicite car la donnée y_{n+1}, que l'on cherche, est calculée à partir de y_n, h, t_n et y_{n+1} lui-même !

On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et k-lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable (i.e. $\forall x, z \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t,x) - f(t,z)| < k|x-z|$). Ces hypothèses assurent l'existence d'une unique solution y définie sur $\mathbb{R}$. On considère alors le schéma d'Euler implicite vu plus haut :

$$\begin{cases} y_1 = y(0) \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases} \quad \text{(Euler implicite)}$$

a. Montrer que le calcul de y_{n+1} revient à déterminer le point fixe de $\phi(x) = y_n + hf(t_n, x)$.

b. Montrer que pour tout $x, z \in \mathbb{R}$ $|\phi(x) - \phi(z)| < kh|x-z|$ où k est la constante de Lipschitz de f.

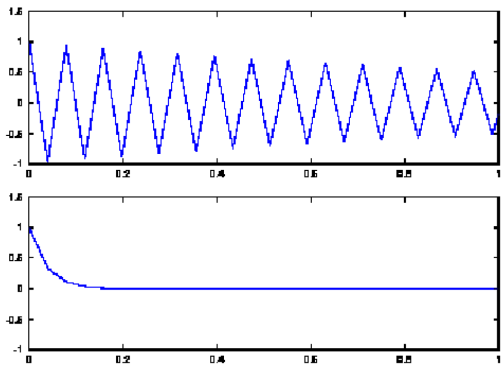
c. En déduire que ϕ est contractante si $h < \dfrac{1}{k}$.

d. Quelles méthodes vues en MT40 permettent alors de calculer y_{n+1} ? Laquelle choisiriez-vous ?

e. Pourquoi dit-on que la méthode d'Euler implicite est plus coûteuse en temps de calcul ?

5. Bilan.

On a représenté ci-dessous les solutions numériques de l'équation $y' = -50y$ avec $y(0) = 1$ calculées par les méthodes d'Euler explicite et Euler implicite pour $h = 1.974/50$



a. Commenter ces deux solutions numériques.

b. Faire le bilan de l'exercice en expliquant quel avantage et quel inconvénient présente la méthode d'Euler implicite par rapport à la méthode d'Euler explicite.