FINAL

Tous documents (sauf livres) et calculatrices autorisés. Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du devoir. Le barème prendra en compte la longueur du sujet.

UN COPIE POUR LES EXERCICES 1 & 2, UNE COPIE POUR L'EXERCICE 3

Exercice 1 Équations différentielles : questions de cours

1. Pourquoi la donnée d'une équation différentielle du premier ordre correspond à une distribution de pentes (ou de tangentes) dans le plan ? Esquisser le champ de pentes pour l'équation différentielle $y' = y^2$.

2. En quel sens le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 corrige-t-il le schéma de Euler ? Écrire la définition des itérés pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y' = y^2 \end{cases}$$

Exercice 2 Équations non linéaires : Méthode de Newton-Tchebychev

Dans ce problème nous étudions une méthode numérique pour résoudre une équation de type $g(x) = 0$ lorsque g est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. Pour ce faire nous allons remplacer la recherche de la racine de $g(x) = 0$ par un problème de point fixe pour une fonction f. L'idée de cette nouvelle méthode (due à Tchebychev) est d'introduire une fonction auxilliaire h pour augmenter l'ordre de convergence de la méthode du point fixe.

1. Dans cette partie on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et $f'(\alpha) = f''(\alpha) = 0$.

- **a.** Rappeler l'expression des itérés (x_n) construits par la méthode du point fixe.
- **b.** Montrer que le point α est un point attractif. En déduire qu'il existe un intervalle $I =]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$ tel que pour tout $x_0 \in I$ la suite (x_n) des itérés du point fixe converge vers α.
- **c.** Écrire le développement de Taylor-Lagrange de f entre les points x_n et α à l'ordre 3.
- **d.** En déduire l'existence d'un réel $\beta \geqslant 0$ tel que $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \beta |x_n - \alpha|^3$. Quel ordre de convergence peut-on garantir pour cette méthode ?

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$ et $g'(\alpha) \neq 0$. On considère une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ (que l'on déterminera plus tard) et on note $f(x) = x + h(x)g(x)$.

- **a.** Montrer que α est solution de $g(x) = 0$ si et seulement si α est un point fixe de f.
- **b.** Calculer $h(\alpha)$ et $h'(\alpha)$ en fonction de $g'(\alpha)$ et $g''(\alpha)$ pour que la méthode du point fixe appliquée à la recherche de α solution de $f(\alpha) = \alpha$ converge localement (sur un intervalle I) avec une vitesse de convergence d'ordre 3.

3. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour $x \in I - \{\alpha\}$ et on donne maintenant

$$h(x) = -\frac{1}{g'(x)} - \frac{g''(x)g(x)}{2g'(x)^3}$$

a. Calculer $h(\alpha)$ et $h'(\alpha)$ et montrer que les conditions trouvées à la question précédente sont satisfaites.

b. En déduire que le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)} - \dfrac{g''(x_n)[g(x_n)]^2}{2g'(x_n)^3} \end{cases}$$

converge localement et que la vitesse de convergence est au moins cubique.

c. Ce schéma est appelé schéma de Newton-Tchebychev. En quoi diriez-vous qu'il s'agit d'une amélioration de la méthode de Newton ?

4. Application numérique : dans cette question on cherche à approximer $\sqrt{2}$ par la méthode de Newton-Tchebychev. Pour cela on applique la méthode précédente à la fonction $g(x) = x^2 - 2$.

a. Montrer que dans ce cas la fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{3x^4 + 12x^2 - 4}{8x^3}$.

b. Calculer f' et déterminer graphiquement un intervalle I tel que $\sqrt{2} \in I$ et $2 \in I$ et tel que le schéma de Newton-Tchebychev soit convergent pour tout $x_0 \in I$.

c. En déduire que

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

converge vers $\sqrt{2}$ et que la vitesse de convergence est au moins cubique.

d. Trois étudiants ont implémenté cette nouvelle méthode avec différents choix de x_0, voici leur résultats donnés avec 10 chiffres significatifs :

	Étudiant 1	Étudiant 2	Étudiant 3
x_0	2	-0.1	0.5
x_1	$1,437500000$	$484,9625$	$-0,812500000$
x_2	$1,414216605$	$181,8640$	$-1,218661100$
x_3	$1,414213562$	$68,2073$	$-1,411594922$
x_4	$1,414213562$	$25,5997$	$-1,414213558$
x_5	$1,414213562$	$9,6585$	$-1,414213562$
x_6	$1,414213562$	$3,7767$	$-1,414213562$
x_7	$1,414213562$	$1,8041$	$-1,414213562$
x_8	$1,414213562$	$1,4228$	$-1,414213562$
x_9	$1,414213562$	$1,414213720$	$-1,414213562$
x_{10}	$1,414213562$	$1,414213562$	$-1,414213562$

Commenter les résultats.

Exercice 3 Intégration gaussienne

On se propose de calculer numériquement, par méthode de Gauss, une valeur approchée à ε près ($\varepsilon \in \mathbf{R}^{+*}$) de :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\ln(3+x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

1. Montrer que I existe. Quelle méthode de Gauss utilisera-t-on ?

2. *Détermination d'outils*

a. On pose $r(x) = \ln(3+x)$.
Montrer que r est indéfiniment dérivable sur $[-1,1]$; on notera, pour tout k de $\mathbf{N}$, $r^{(k)}$ sa dérivée $k^{ième}$, dont on montrera qu'elle vérifie pour tout $k > 0$:

$$r^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! \, (3+x)^{-k}$$

b. Majorer $\left|r^{(k)}\right|$ sur $[-1,1]$ par une valeur à déterminer M_k.

c. Fournir en fonction de n de $\mathbf{N}$, l'expression de l'erreur de méthode E_{n+1} commise, lors de l'intégration gaussienne à $n+1$ points, utilisée pour approcher I.

d. Montrer qu'il existe un réel, noté u_{n+1}, à déterminer tel que :

$$|E_{n+1}| \leqslant u_{n+1}$$

e. Montrer que la suite (u_{n+1}) est convergente de limite nulle et décroissante.
Nb : On aura pour ce dernier point, intérêt à considérer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

3. *Nombre de points nécessaires pour calculer à ε* près

a. Déduire de 2.d., que pour avoir $|E_{n+1}| < \varepsilon$ il suffit que $u_{n+1} < \varepsilon$.

b. Écrire un algorithme qui permet de déterminer le premier k_0 tel que $u_{k_0+1} < \varepsilon$.
Pourquoi est-on certain de trouver un tel entier k_0 ?